

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

A.0.5261

THESE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Monsieur YUEN PING CHENG

pour obtenir

le grade de Docteur Ès-Sciences

Sujet de la Thèse : *Sur les prolongements de G-structures.*

soutenue en 12/1970 devant la Commission d'Examen.

11 DEC. 1970

MM. EHRESMANN

Président

LICHNEROWICZ

Examineurs

ZISMAN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553014_0049

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Monsieur YUEN PING CHENG

pour obtenir

le grade de Docteur Ès-Sciences

Sujet de la Thèse : *Sur les prolongements de G-structures.*

soutenue en 12/1970 devant la Commission d'Examen.

MM. EHRESMANN	<i>Président</i>
LICHNEROWICZ	<i>Examineurs</i>
ZISMAN	



INTRODUCTION

L'ensemble $\bar{H}^k(V_n)$ des repères semi-holonomes d'ordre k sur une variété différentiable V_n de dimension n et de classe C^∞ forme un espace fibré principal différentiable de base V_n et de groupe structural $\bar{L}_n^k$. Soit G_k un sous-groupe de Lie de $\bar{L}_n^k$. Une G_k -structure d'ordre k sur V_n est une réduction du groupe structural $\bar{L}_n^k$ de $\bar{H}^k(V_n)$ à G_k , c'est-à-dire un sous-espace fibré principal différentiable $H_{G_k}(V_n)$ de groupe structural G_k de $\bar{H}^k(V_n)$. A tout élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ est associé un n -plan horizontal de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ au point u' , où u' est la projection de u dans $\bar{H}^{k-1}(V_n)$. On appelle premier prolongement semi-holonyme de $H_{G_k}(V_n)$ l'ensemble $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ des éléments de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ tels que leur n -plan associé soit tangent à $H_{G_k}(V_n)$. L'ensemble $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ peut être vide. Ceci nous amène à introduire la notion d'une G_k -structure régulière. Pour une telle G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$, son prolongement $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ forme un sous-espace fibré principal différentiable de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$; la structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ sera dite presque intégrable si l'intersection $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ est un sous-espace fibré principal différentiable de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$, où $H^{k+1}(V_n)$ est l'espace des repères holonomes d'ordre $k+1$ sur V_n . On définit divers tenseurs de structure qui sont des obstacles à la presque intégrabilité: une G_k -

structure régulière d'ordre k est presque intégrable si et seulement si l'un des tenseurs de structure est nul. Pour $k = 1$, on retrouve parmi les tenseurs de structure le tenseur de structure de Ehresmann-Bernard. Pour les G -structures du premier ordre qui sont k -intégrables, on retrouve aussi le tenseur de structure d'ordre k de Guillemin.

On introduit ensuite la notion d'une G -structure géométrique sur V_n , où G est une suite de groupes de Lie réguliers vérifiant des conditions supplémentaires. C'est une structure infinitésimale régulière au sens de Ehresmann; elle comprend comme cas particuliers les structures projectives et les structures conformes. Pour certaines G -structures géométriques dites normales, on démontre l'existence de G -connexions normales sur V_n si la variété V_n est paracompacte. Le groupe des G -automorphismes sur V_n est un groupe de Lie s'il existe une G -connexion normale invariante par rapport à tous les G -automorphismes.

Les prolongements à l'espace fibré tangent de structures géométriques sur une variété différentiable ont été étudiés par beaucoup d'auteurs. La plupart des structures classiques sur une variété différentiable V_n de dimension finie n peuvent se définir comme des G -structures sur V_n , où G est

un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Morimoto introduit des prolongements de G-structures à l'espace fibré tangent. Nous proposons d'étendre ses résultats aux espaces des p^r -vitesses; en particulier, si $p = 1$ et $r = 1$, nous retrouvons des résultats de Morimoto. Notre méthode de prolongement s'applique aussi aux variétés des points proches de Weil, nous définissons ainsi les A-prolongements de G-structures, où A est une algèbre locale au sens de Weil.

Ce travail est divisé en cinq chapitres:

Le chapitre I débute par une nouvelle définition d'un repère semi-holonome d'ordre supérieur. Cette définition est essentiellement équivalente à celle donnée par Ehresmann; elle permet, cependant, d'introduire une forme canonique sur l'espace fibré principal des repères semi-holonomes d'ordre supérieur, forme qui est une extension de la forme canonique donnée par Kobayashi sur l'espace des repères holonomes d'ordre supérieur. A l'aide de la forme canonique, nous donnons un critère d'holonomie qui permet de déterminer quand un repère d'ordre supérieur est holonome. Ce résultat nous sera utile pour étudier la presque intégrabilité d'une G_k -structure régulière.

Le chapitre II est consacré aux connexions d'ordre supérieur. Nous commençons par une étude des connexions

linéaires d'ordre supérieur. La notion de torsion d'une connexion linéaire d'ordre supérieur et les équations de structure d'une connexion linéaire d'ordre supérieur s'introduisent naturellement.

Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des connexions linéaires d'ordre k (resp. connexions linéaires quasi-holonomes d'ordre k qui sont sans torsion) sur V_n et l'ensemble des relèvements de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ (resp. dans $H^{k+1}(V_n)$) compatibles avec l'homomorphisme canonique de L_n^1 dans L_n^{k+1} .

Une connexion linéaire d'ordre k sur V_n est localement plate si et seulement si elle s'obtient par prolongements successifs d'une connexion linéaire du premier ordre sans torsion et sans courbure.

Les quasi-connexions et les multi-connexions s'inspirent des travaux de P. Libermann.

Dans le chapitre III nous introduisons la notion d'une G_k -structure régulière. Le problème de la presque intégrabilité d'une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ se ramène à l'existence en chaque point u de $H_{G_k}(V_n)$ d'un relèvement z appartenant à l'intersection de deux espaces fibrés principaux $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ et $H^{k+1}(V_n)$. Deux directions se présentent:

- (1) On considère les relèvements de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ et l'on mesure leur défaut d'holonomie;
- (2) On considère les relèvements de $H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$ et l'on calcule leur déviation vis-à-vis de la " G_k -adaptation".

Ces considérations nous conduisent à définir divers tenseurs de structure qui sont des obstacles à la presque intégrabilité de $H_{G_k}(V_n)$.

Le chapitre IV étudie les G -structures géométriques. Notre définition s'inspire des travaux de Sternberg-Guillemin et de Kobayashi-Nagano. Les structures projectives et les structures conformes sont des G -structures d'ordre 2.

Le chapitre V étudie les prolongements de G -structures aux espaces de prolongements. Après un rappel des propriétés du foncteur T_p^r introduit par Ehresmann, on définit une représentation de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$.

Toute G -structure (resp. intégrable) sur V_n induit une $\hat{G}$ -structure (resp. intégrable) sur $T_p^r(V_n)$, où $\hat{G}$ est le T_p^r -prolongement du groupe G .

Nous avons comme applications les résultats suivants:

- (i) Toute structure presque complexe (resp. complexe) sur une variété différentiable V_n de dimension

paire induit une structure presque complexe
(resp. complexe) sur $T_p^r(V_n)$.

- (ii) Toute structure presque produit (resp. intégrable)
sur V_n induit une structure presque produit (resp.
intégrable) sur $T_p^r(V_n)$.

Nous terminons ce travail en indiquant comment notre méthode
de prolongement s'applique à la théorie des points proches
de Weil.

Certains des résultats de ce travail ont été annoncés
dans des notes aux comptes rendus de l'Académie des Sciences
[41] .

Je tiens à exprimer mon grand respect envers mon Maître,
Monsieur C. Ehresmann, qui n'a cessé de me prodiguer ses
conseils et encouragements avec la plus grande bienveillance.
Je remercie Monsieur A. Kumbera qui étudia soigneusement
les manuscrits, ainsi que Monsieur A. Lichnérowicz et
Monsieur M. Zisman qui me font l'honneur de faire partie
du jury. Il m'est enfin très agréable de pouvoir remercier
Mademoiselle A. Bastiani, qui m'aide à améliorer le texte.

NOTATIONS

- Les variétés différentiables, les espaces fibrés différentiables et les applications différentiables considérés sont toujours de classe C^∞ .
- Soient V , W et Y des variétés différentiables. Soit f (resp. g) une application différentiable locale de V (resp. W) dans W (resp. Y). On désignera par $g \circ f$ le pseudoproduit de f et de g .
- Soit h (resp. h') une application différentiable locale d'un ouvert U (resp. U') de V dans un ouvert $\bar{U}$ (resp. $\bar{U}'$) de W . Si h et h' définissent la même application sur l'ouvert $U \cap U'$, on dira que h et h' sont localement égales et on notera $h \underset{\Delta}{=} h'$ ou même $h = h'$ s'il n'y a pas de confusion.
- Si une flèche dans un diagramme n'est pas nommée, il s'agit toujours la projection naturelle considérée.
- On identifie souvent un groupe, espace vectoriel, algèbre de Lie, espace fibré etc. avec l'ensemble sous-jacent ou même avec une structure sous-jacente. Par exemple, soit G un groupe abélien et soit E un espace vectoriel. On dira que G est isomorphe à E si le groupe abélien G est isomorphe à E , considéré comme un groupe abélien.

- Soit $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U d'une variété différentiable V_n , où les x^i sont les fonctions de coordonnées. Un point x de U s'exprime en coordonnées locales par $x = (x^1(x), x^2(x), \dots, x^n(x))$ ou même par $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- "La" catégorie des applications différentiables entre variétés différentiables signifiera la catégorie des applications différentiables associée à un univers μ : les objets sont les variétés différentiables dont l'ensemble sous-jacent appartient à l'univers μ et les morphismes sont les applications différentiables entre ces variétés différentiables.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION :	i
Chapitre I. REPERES D'ORDRE SUPERIEUR	
1. Repères semi-holonomes	1
2. Forme canonique sur $\bar{H}^k(V_n)$	4
3. Repères holonomes	6
4. Relations entre $\bar{H}^k(V_n)$, $\bar{P}^k(V_n)$ et $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$	10
5. Coordonnées locales de $\bar{H}^k(V_n)$	16
6. Un critère d'holonomie	19
7. Quelques remarques sur $\bar{H}^k(R^n)$	25
Chapitre II. CONNEXIONS D'ORDRE SUPERIEUR	
1. Connexions linéaires d'ordre supérieur	29
2. Connexions linéaires d'ordre 2	33
3. ξ -connexions	42
4. Espaces fibrés vectoriels $\bar{S}^{kT}$ et S^{kT}	50
5. Connexions linéaires et ξ -connexions	54
6. Pseudo-connexions et multi-connexions	60
7. Prolongements d'une connexion	64
Chapitre III. TENSEURS DE STRUCTURE	
1. G-structure régulière	69
2. Tenseurs de structure	76
3. G-structures du premier ordre	92

Chapitre IV. G -STRUCTURES GEOMETRIQUES ET
 G -CONNEXIONS

1. G -structures géométriques	98
2. Connexions de Cartan	106
3. G -connexions	114

Chapitre V. PROLONGEMENTS DE G -STRUCTURES
AUX ESPACES DE PROLONGEMENTS

1. Rappels sur le foncteur T_p^r	125
2. T_p^r -prolongement d'une connexion linéaire	127
3. Représentation de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$	130
4. T_p^r -prolongements de G -structures	132
5. Quelques applications	136
6. Points proches de Weil	139
7. Représentation de $A(H^1(V_n))$ dans $H^1(A(V_n))$	144
8. A -prolongement d'une G -structure	147
BIBLIOGRAPHIE	151

CHAPITRE I

REPERES D'ORDRE SUPERIEUR

1. Repères semi-holonomes.

Soit V_n une variété différentiable réelle de dimension finie n . On appelle repère du premier ordre de V_n au point x tout 1-jet inversible de R^n dans V_n de source 0 et de but x . L'ensemble $H^1(V_n)$ des repères du premier ordre de V_n définit un espace fibré principal aussi noté $H^1(V_n)$ de base V_n , de groupe structural $L_n^1 = GL(n, R)$ et de projection π'_0 qui associe à chaque jet son but. L'espace $H^1(R^n) = R^n \times L_n^1$ s'identifie au groupe des transformations affines sur R^n . Il y a un élément distingué dans $H^1(R^n)$, à savoir le 1-jet de source 0 de l'application identique de R^n ; nous le désignerons par e_1 .

Considérons un isomorphisme local h d'espaces fibrés principaux de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$. On déduit un difféomorphisme local f de R^n dans V_n de sorte que $f \cdot \pi'_0 = \pi'_0 \cdot h$. Par abus de notations, nous avons désigné les deux projections par le même symbole π'_0 . Nous dirons que h est admissible si la source de h contient e_1 et si $h(e_1) = j_0^1 f$.

L'ensemble $\bar{H}^2(V_n)$ des 1-jets $j_{e_1}^1 h$, où h est un isomorphisme local admissible de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$, est

muni de deux structures d'espace fibré principal. Il y a une structure d'espace fibré principal de base $H^1(V_n)$, de projection π_1^2 qui associe à chaque jet son but, et de groupe structural $\bar{M}_n^2$ dont les éléments sont les 1-jets des isomorphismes locaux admissibles de $H^1(R^n)$ dans $H^1(R^n)$ de source et but e_1 . Le groupe de Lie $\bar{M}_n^2$ opère à droite sur $\bar{H}^2(V_n)$ par la composition des jets. Nous désignerons par $\bar{L}_n^2$ la fibre de $\bar{H}^2(R^n)$ au-dessus de 0 de R^n . Si $g_1 = j_{e_1}^1 h_1 \in \bar{L}_n^2$ et $g_2 = j_{e_1}^1 h_2 \in \bar{L}_n^2$, alors le pseudoproduit $h_1 \cdot h_2$ est un isomorphisme local admissible de $H^1(R^n)$ dans $H^1(R^n)$ et nous posons $g_1 \cdot g_2 = j_{e_1}^1 (h_1 \cdot h_2)$ qui ne dépend que de g_1 et de g_2 . L'ensemble $\bar{L}_n^2$ est muni d'une structure de groupe de Lie. La restriction de $\pi_1^2 : \bar{H}^2(R^n) \longrightarrow H^1(R^n)$ à $\bar{L}_n^2$ est un homomorphisme de groupes de $\bar{L}_n^2$ sur L_n^1 ou'on notera toujours π_1^2 ; le noyau de cet homomorphisme est précisément $\bar{M}_n^2$. La deuxième fibration sur $\bar{H}^2(V_n)$ est donnée par la projection naturelle π_2^2 de $\bar{H}^2(V_n)$ sur V_n . Le groupe structural $\bar{L}_n^2$ opère à droite sur $\bar{H}^2(V_n)$ de façon suivante: si $u = j_{e_1}^1 h \in \bar{H}^2(V_n)$ et $g = j_{e_1}^1 b \in \bar{L}_n^2$, alors le pseudo-produit $h \cdot b$ est un isomorphisme local admissible de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$ et nous posons $ug = j_{e_1}^1 (h \cdot b)$ qui ne dépend que de u et de g .

Il y a un élément distingué e_2 dans $\bar{H}^2(R^n) = R^n \rtimes \bar{L}_n^2$, à savoir le 1-jet de source e_1 de l'application identique

de $H^1(R^n)$. Soit g un isomorphisme local d'espaces fibrés principaux de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$. On déduit un isomorphisme local h de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$. On dira que g est admissible si l'isomorphisme déduit h est admissible et si $g(e_2) = j_{e_1}^1 h$. L'ensemble $\bar{H}^3(V_n)$ des 1-jets $j_{e_2}^1 g$, où g est un isomorphisme local admissible de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$, forme un espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $\bar{L}_n^3$. On définit $\bar{H}^k(V_n)$ par récurrence. Soit u un isomorphisme local d'espaces fibrés principaux de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(V_n)$. On déduit un isomorphisme local v de $\bar{H}^{k-2}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-2}(V_n)$. On dira que u est admissible si l'isomorphisme déduit v est admissible et si $u(e_{k-1}) = j_{e_{k-2}}^1 v$, où e_m est l'élément distingué dans $\bar{H}^m(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^m$. L'ensemble $\bar{H}^k(V_n)$ des 1-jets $j_{e_{k-1}}^1 u$, où u est un isomorphisme local admissible de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(V_n)$, forme un espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $\bar{L}_n^k$; le groupe $\bar{L}_n^k$ n'est autre que la fibre de $\bar{H}^k(R^n)$ au-dessus de 0 de R^n . L'espace $\bar{H}^k(V_n)$ est aussi muni d'une structure d'espace fibré principal de base $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ et de groupe structural $\bar{M}_n^k = \text{Ker}(\bar{L}_n^k \rightarrow \bar{L}_n^{k-1})$. Un élément z de $\bar{H}^k(V_n)$ s'appellera repère semi-holonyme d'ordre k de V_n au point x , où x est la projection de z sur V_n . Pour tout entier $m < k$, la projection naturelle π_m^k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^m(V_n)$ est compatible avec l'homomorphisme surjectif $\pi_m^k : \bar{L}_n^k \rightarrow \bar{L}_n^m$ obtenu par la restriction

à $\bar{L}_n^k$ de la projection de $\bar{H}^k(R^n)$ sur $\bar{H}^m(R^n)$. Nous désignerons l'élément distingué dans $\bar{H}^k(R^n)$ par e_k .

2. Forme canonique sur $\bar{H}^k(V_n)$.

Un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ s'écrit $u = j_{e_k}^1 h$, où h est un isomorphisme local admissible de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(V_n)$; il détermine donc un isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ de $\bar{E}^{k-1} = T_{e_{k-1}}(\bar{H}^{k-1}(R^n))$ sur $T_{u'}(\bar{H}^{k-1}(V_n))$, où u' est l'image de u par la projection π_{k-1}^k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^{k-1}(V_n)$. Comme $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ s'identifie à $R^n \times \bar{L}_n^{k-1}$, on a une décomposition canonique $\bar{E}^{k-1} = R^n \oplus \bar{\mathcal{E}}_n^{k-1}$, où $\bar{\mathcal{E}}_n^{k-1}$ est l'algèbre de Lie associée à $\bar{L}_n^{k-1}$. Désormais R^n s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\bar{E}^{k-1}$. La restriction de $\tilde{u}$ aux vecteurs de $\bar{\mathcal{E}}_n^{k-1}$ coïncide avec Tu' , prolongement de l'application u' aux vecteurs tangents. Rappelons que u' peut être considéré comme une application différentiable de la fibre-type $\bar{L}_n^{k-1}$ sur la fibre de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ passant par le point u' . L'image de la composante R^n de $\bar{E}^{k-1}$ par $\tilde{u}$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $T_{u'}(\bar{H}^{k-1}(V_n))$ complémentaire à l'espace des vecteurs verticaux de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ au point u' . Nous dirons que $\tilde{u}(R^n)$ est le n -plan horizontal associé au repère u .

Soit v l'image de u par la projection π_n^k . Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{E}^{k-1} & \xrightarrow{\tilde{u}} & T_{u'}(\bar{H}^{k-1}(V_n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{E}^{m-1} & \xrightarrow{\tilde{v}} & T_{v'}(\bar{H}^{m-1}(V_n))
 \end{array}$$

où v' est la projection de v par π_{m-1}^m , et où les flèches verticales sont les projections naturelles.

Soit Z un vecteur tangent à $\bar{H}^k(V_n)$ au point u . L'image $Z' = T\pi_{k-1}^k(Z)$ de Z par la projection π_{k-1}^k est un vecteur tangent à $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ au point $u' = \pi_{k-1}^k(u)$. La forme différentielle θ_k sur $\bar{H}^k(V_n)$ définie par

$$\theta_k(Z) = \tilde{u}^{-1}(T\pi_{k-1}^k(Z))$$

s'appellera forme canonique sur $\bar{H}^k(V_n)$; elle est à valeurs dans l'espace vectoriel $\bar{E}^{k-1}$. Pour tout entier positif $m < k$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 T(\bar{H}^k(V_n)) & \xrightarrow{\theta_k} & \bar{E}^{k-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T(\bar{H}^m(V_n)) & \xrightarrow{\theta_m} & \bar{E}^{m-1}
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections naturelles.

Le groupe de Lie $\bar{L}_n^k$ opère d'une façon naturelle sur $\bar{E}^{k-1}$. En effet, si g est un élément de $\bar{L}_n^k$, il définit un isomorphisme linéaire $\tilde{g}$ de $\bar{E}^{k-1}$ sur $T_{g'}(\bar{H}^{k-1}(R^n))$, où $g' = \pi_{k-1}^k(g)$. La translation à droite $TR_{g'}^{-1}$ détermine un isomorphisme linéaire de $T_{g'}(\bar{H}^{k-1}(R^n))$ sur $\bar{E}^{k-1}$. Le

composé définit donc un isomorphisme linéaire de $\bar{E}^{k-1}$ sur lui-même. Nous obtenons ainsi une représentation linéaire ρ de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{E}^{k-1}$ définie par $\rho(g) = \text{TR}_{g'}^{-1} \cdot \tilde{g}$. Pour $m < k$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \bar{E}^{k-1} & \xrightarrow{\rho(g)} & \bar{E}^{k-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{E}^{m-1} & \xrightarrow{\rho(\pi_m^k(g))} & \bar{E}^{m-1} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections naturelles. Il est à signaler que la restriction de $\rho(g)$ aux vecteurs verticaux de $\bar{E}^{k-1}$ est tout simplement l'opération de $g' = \pi_{k-1}^k(g)$ sur $\bar{E}_n^{k-1}$ par la représentation adjointe de $\bar{L}_n^{k-1}$ sur son algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{E}}_n^{k-1}$.

PROPOSITION I.1

La forme canonique θ_k est une 1-forme pseudotensorielle sur $\bar{H}^k(V_n)$: si $g \in \bar{L}_n^k$ et $Z \in T(\bar{H}^k(V_n))$, on a

$$\theta_k(\text{TR}_g(Z)) = \rho(g^{-1}) \theta_k(Z).$$

3. Repères holonomes.

Un difféomorphisme f de V_n sur V'_n induit un isomorphisme d'espaces fibrés principaux $f^{(k)}$ de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^k(V'_n)$. Cet isomorphisme $f^{(k)}$ possède les propriétés suivantes:

- (i) $\pi_m^k \circ f^{(k)} = f^{(m)} \circ \pi_m^k$ pour tout entier non négatif $m < k$;

- (ii) $f^{(k)}$ est compatible avec les formes canoniques, c'est-à-dire si θ_k et θ'_k sont respectivement la forme canonique sur $\bar{H}^k(V_n)$ et $\bar{H}^k(V'_n)$, on a $f^{(k)*} \theta'_k = \theta_k$.

THEOREME I.2

Un difféomorphisme φ de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^k(V'_n)$ peut s'écrire localement sous la forme $\varphi = f^{(k)}$ pour un certain difféomorphisme local f de V_n dans V'_n si et seulement si φ est compatible avec les formes canoniques.

Il suffit de démontrer que la condition est suffisante. Cela se fait par récurrence. Dans le cas où $k = 1$, nous avons le lemme:

LEMME I.3

Soit φ un difféomorphisme local de $H^1(V_n)$ dans $H^1(V'_n)$ tel que $\varphi^* \theta'_1 = \theta_1$. Alors φ s'écrit localement sous la forme $\varphi = f^{(1)}$ pour un certain difféomorphisme local f de V_n dans V'_n .

Considérons un vecteur $Z \in T_u(H^1(V_n))$ tel que $T\pi'_0(Z) = 0$. La condition $\varphi^* \theta'_1 = \theta_1$ entraîne que $T\pi'_0(T\varphi(Z)) = 0$. Le difféomorphisme φ envoie donc les vecteurs verticaux de $H^1(V_n)$ sur les vecteurs verticaux de $H^1(V'_n)$. Localement φ respecte les fibres et induit ainsi un difféomorphisme local f de V_n dans V'_n tel que $f \cdot \pi'_0 = \pi'_0 \circ \varphi$.

Montrons que $\varphi \circ f^{(1)}$. Ceci revient à montrer $\varphi(u) = j_x^{1f} \circ u$ pour tout élément u de $H^1(V_n)$, où x est la projection de u dans V_n . Soit $\xi \in R^n$. Choisissons un vecteur tangent $Z \in T_u(H^1(V_n))$ tel que $T\pi_0^1(Z) = \tilde{u}(\xi)$. Nous avons donc $\{j_x^{1f} \circ u\}(\xi) = \{Tf \circ \tilde{u}\}(\xi) = \{Tf \circ T\pi_0^1\}(Z) = \{T\pi_0^1 \circ T\varphi\}(Z)$. D'autre part, $\{\widetilde{\varphi(u)}^{-1} \circ T\pi_0^1 \circ T\varphi\}(Z) = \{\tilde{u}^{-1} \circ T\pi_0^1\}(Z) = \xi$, d'où le résultat.

Supposons que le théorème est vrai pour tout $m \leq k-1$. Soit $Z \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$ tel que $T\pi_{k-1}^k(Z) = 0$. La condition $\varphi^* \theta'_k = \theta_k$ implique que $\{T\pi_{k-1}^k \circ T\varphi\}(Z) = 0$. Localement le difféomorphisme φ respecte les fibres vis-à-vis des fibrations $\bar{H}^k(V_n) \longrightarrow \bar{H}^{k-1}(V_n)$ et $\bar{H}^k(V'_n) \longrightarrow \bar{H}^{k-1}(V'_n)$. Il existe alors un difféomorphisme local ψ de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(V'_n)$ de sorte que $\psi \circ \pi_{k-1}^k \circ \pi_{k-1}^k \circ \varphi$. Puisque $\pi_{k-1}^k * \theta_{k-1} = T\pi_{k-2}^{k-1} \circ \theta_k$ (resp. $\pi_{k-1}^k * \theta'_{k-1} = T\pi_{k-2}^{k-1} \circ \theta'_k$), nous avons

$$\begin{aligned} \{ \pi_{k-1}^k * (\psi^* \theta'_{k-1}) \}(Z) &= \{ \theta'_{k-1} \circ T\psi \circ T\pi_{k-1}^k \}(Z) \\ &= \{ \theta'_{k-1} \circ T\pi_{k-1}^k \circ T\varphi \}(Z) \\ &= (\pi_{k-1}^k * \theta'_{k-1})(T\varphi(Z)) \\ &= \{ T\pi_{k-2}^{k-1} \circ \theta'_k \circ T\varphi \}(Z) \\ &= \{ T\pi_{k-2}^{k-1} \circ \theta_k \}(Z) \\ &= (\pi_{k-1}^k * \theta_k)(Z) \end{aligned}$$

pour tout vecteur $Z \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$. Comme π_{k-1}^k est surjective, on déduit $\psi^* \theta'_{k-1} = \theta_{k-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un difféomorphisme local f de V_n dans V'_n tel que ψ s'écrit localement sous la forme $\psi_{\bar{\lambda}} = f^{(k-1)}$. On a ainsi $f^{(k-1)} \cdot \pi_{k-1}^k \bar{\lambda} = \pi_{k-1}^k \cdot \varphi$. Nous allons montrer que localement $\varphi_{\bar{\lambda}} = f^{(k)}$. Un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ détermine un isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ de $\bar{E}^{k-1}$ sur $T_{u'}(\bar{H}^{k-1}(V_n))$, où $u' = \pi_{k-1}^k(u)$. Deux éléments u et v de $\bar{H}^k(V_n)$ sont identiques si et seulement si $\tilde{u} = \tilde{v}$. Il suffit donc de montrer que $\widetilde{\varphi(u)} = \widetilde{f^{(k)}(u)}$ pour tout élément u de $\bar{H}^k(V_n)$. Soit $\xi \in \bar{E}^{k-1}$. Choisissons un vecteur $Z \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$ tel que $\theta_k(Z) = \xi$. Nous avons $\theta_k(Z) = (\psi^* \theta'_{k-1})(Z) = (\theta'_{k-1} \cdot T\varphi)(Z) = \{ \widetilde{\varphi(u)}^{-1} \cdot T\pi_{k-1}^k \cdot T\varphi \}(Z)$. D'autre part, $\xi = \theta_k(Z) = (\tilde{u}^{-1} \cdot T\pi_{k-1}^k)(Z)$. Nous avons ainsi $\widetilde{\varphi(u)}(\xi) = (T\pi_{k-1}^k \cdot T\varphi)(Z) = \{ T f^{(k-1)} \cdot T\pi_{k-1}^k \}(Z) = \{ T f^{(k-1)} \cdot \tilde{u} \}(\xi) = \widetilde{f^{(k)}(u)}(\xi)$ quel que soit $\xi \in \bar{E}^{k-1}$. Par conséquent $\varphi_{\bar{\lambda}} = f^{(k)}$, d'où le résultat du théorème.

COROLLAIRE I.4

Soit φ un isomorphisme d'espaces fibrés principaux de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^k(V'_n)$. Soit f le difféomorphisme de V_n sur V'_n déduit de φ . Alors $\varphi = f^{(k)}$ si et seulement si φ est compatible avec les formes canoniques.

Tout difféomorphisme local f d'un voisinage ouvert de 0 dans R^n sur un ouvert de V_n induit un isomorphisme local admissible $f^{(k-1)}$ de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(V_n)$. Par conséquent $u = j_{e_{k-1}}^1 f^{(k-1)}$ est un élément de $\bar{H}^k(V_n)$. On dira qu'un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ est un repère holonome d'ordre k de V_n si u peut s'écrire sous la forme $u = j_{e_{k-1}}^1 f^{(k-1)}$, où f est un difféomorphisme local de R^n dans V_n . Un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ est holonome si et seulement si l'on peut trouver un représentant de u compatible avec les formes canoniques. L'ensemble $\bar{H}^k(V_n)$ des repères holonomes d'ordre k de V_n définit un sous-espace fibré principal de groupe structural L_n^k de $\bar{H}^k(V_n)$, où L_n^k est le sous-groupe des éléments holonomes de $\bar{L}_n^k$. Il y a un isomorphisme entre L_n^k et le groupe des k -jets inversibles de R^n dans R^n de source et but 0. L'espace $\bar{H}^k(V_n)$ définit un espace fibré principal sur $\bar{H}^{k-1}(V_n)$, le groupe structural étant $M_n^k = M_n^k \cap L_n^k$, noyau de l'homomorphisme surjectif de L_n^k sur L_n^{k-1} .

4. Relations entre $\bar{H}^k(V_n)$, $\bar{P}^k(V_n)$ et $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$.

Soient W et Y des variétés différentiables. Soit $\bar{J}^k(W, Y)$ la variété différentiable des jets semi-holonomes d'ordre k de W dans Y . Pour la définition d'un jet semi-holonome, nous renvoyons aux travaux de Ehresmann [6g], [6h].

Soit p_m^k la projection naturelle de $\bar{J}^k(W, Y)$ sur $\bar{J}^m(W, Y)$, où $m < k$. Un élément X de $\bar{J}^k(W, Y)$ est inversible si et seulement si la projection $p_1^k(X)$ est inversible. Nous désignerons par $\bar{\pi}^k(W, Y)$ l'ensemble des jets inversibles de $\bar{J}^k(W, Y)$. L'ensemble $\bar{\pi}^k(W, Y)$ est donc l'image réciproque de $\pi^1(W, Y)$ par la submersion p_1^k , où $\pi^1(W, Y)$ est l'ensemble des jets inversibles de $J^1(W, Y)$. Puisque $\pi^1(W, Y)$ définit une sous-variété ouverte de $J^1(W, Y)$, il en résulte que $\bar{\pi}^k(W, Y)$ définit une sous-variété ouverte de $\bar{J}^k(W, Y)$. Les relations de transitivité entre les p_m^k entraînent que la restriction de p_m^k à $\bar{\pi}^k(W, Y)$ est une submersion de $\bar{\pi}^k(W, Y)$ sur $\bar{\pi}^m(W, Y)$ [37b] .

Un repère semi-holonyme (resp. holonyme) d'ordre k de V_n au sens de Ehresmann est un jet semi-holonyme (resp. holonyme) inversible d'ordre k de R^n dans V_n de source 0. L'ensemble $\bar{P}^k(V_n)$ (resp. $P^k(V_n)$) des repères semi-holonomes (resp. holonomes) d'ordre k de V_n au sens de Ehresmann définit un espace fibré principal de base V_n , le groupe structural étant le groupe des jets semi-holonomes (resp. holonomes) inversibles d'ordre k de R^n dans R^n de source et but 0. Un élément u de $\bar{P}^k(V_n)$ peut s'écrire sous la forme $u = j_0^1 f$, où f est une application différentiable de R^n dans $\bar{P}^{k-1}(V_n)$ satisfaisant à la condition: $j_0^1(p_{k-2}^{k-1} \cdot f) = f(0)$, où p_{k-2}^{k-1}

est la projection canonique de $\bar{P}^{k-1}(V_n)$ sur $\bar{P}^{k-2}(V_n)$.

THEOREME I.5

Il existe un difféomorphisme canonique ν_k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{P}^k(V_n)$; ce difféomorphisme ν_k possède les propriétés suivantes :

(1) ν_k respecte les fibres de $\bar{H}^k(V_n)$ et de $\bar{P}^k(V_n)$, c'est-à-dire $p_o^k \circ \nu_k = \pi_o^k$;

(2) pour $m < k$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}^k(V_n) & \xrightarrow{\nu_k} & \bar{P}^k(V_n) \\ \pi_m^k \downarrow & & \downarrow p_m^k \\ \bar{H}^m(V_n) & \xrightarrow{\nu_m} & \bar{P}^m(V_n) \end{array}$$

est commutatif ;

(3) la restriction de ν_k à $H^k(V_n)$ est un difféomorphisme de $H^k(V_n)$ sur $P^k(V_n)$.

Le théorème se démontre par récurrence. Pour le cas où $k = 1$, $H^1(V_n)$ et $P^1(V_n)$ sont identiques et ν_1 se réduit à l'application identique. Soit $u = j_{e_1}^1 h$ un élément quelconque de $\bar{H}^2(V_n)$. Soit η_1 la section "nulle" de l'espace fibré trivial $H^1(R^n) = R^n \times L_n^1$. L'application $u \longrightarrow \nu_2(u) = j_o^1(\nu_1 \cdot h \cdot \eta_1)$ définit un difféomorphisme de $\bar{H}^2(V_n)$ sur $\bar{P}^2(V_n)$, car la composition des jets est différentiable. Supposons démontrée l'existence de ν_{k-1} , tel que pour tout $z \in \bar{H}^{k-1}(V_n)$ on ait $\nu_{k-1}(z) = (j_z^1, \nu_{k-2}) \cdot z \cdot (j_o^1 \eta_{k-2})$, où η_{k-2} est

la section "nulle" de l'espace fibré trivial $\bar{H}^{k-2}(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^{k-2}$ et où $z' = \pi_{k-2}^{k-1}(z)$. Soit $y = j_{e_{k-1}}^1 g$ un élément quelconque de $\bar{H}^k(V_n)$. Si η_{k-1} est la section "nulle" de $\bar{H}^{k-1}(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^{k-1}$, l'application pseudo-produit $g' = \nu_{k-1} \circ g \circ \eta_{k-1}$ définit un difféomorphisme local de R^n dans $\bar{P}^{k-1}(V_n)$, de sorte que $j_0^1(\pi_{k-2}^{k-1} \circ g') = g'(0)$; le jet $j_0^1 g'$ définit donc un élément $\nu_k(y)$ de $\bar{P}^k(V_n)$, lequel est indépendant du choix du représentant g . L'application $y \rightarrow \nu_k(y)$ définit un difféomorphisme ν_k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{P}^k(V_n)$ satisfaisant aux conditions voulues. La troisième propriété se déduit du fait que les repères holonomes de $\bar{H}^k(V_n)$ sont en bijection avec les k -jets holonomes inversibles de R^n dans V_n de source 0.

Considérons le cas particulier où $V_n = R^n$. Rappelons que $\bar{L}_n^k$ est la fibre de $\bar{H}^k(R^n)$ située au-dessus de l'origine 0 de R^n . Comme la multiplication dans $\bar{L}_n^k$ est définie par la composition des jets, la restriction de ν_k à $\bar{L}_n^k$ est un isomorphisme de groupes de $\bar{L}_n^k$ sur le groupe des k -jets semi-holonomes inversibles de R^n dans R^n de source et but 0. Il est clair que le difféomorphisme ν_k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{P}^k(V_n)$ est compatible avec cet isomorphisme, d'où

COROLLAIRE I.6

Il existe un isomorphisme canonique d'espaces
fibrés principaux de $\bar{H}^k(V_n)$ (resp. $H^k(V_n)$) sur
 $\bar{P}^k(V_n)$ (resp. $P^k(V_n)$).

Pour tout espace fibré localement trivial E de base V_n , nous désignerons par $J^k E$ la variété des k -jets des sections locales de E . Soit $\tilde{J}^2 E = J^1(J^1 E)$. On définit par récurrence le prolongement non holonome $\tilde{J}^k E = J^1(\tilde{J}^{k-1} E)$. On définit aussi le prolongement semi-holonome $\bar{J}^k E$ en se restreignant aux sections locales telles que, pour tout $0 < m < k$, le relèvement σ de V_n dans $\tilde{J}^m E$ vérifie la condition: $j_x^1(\pi_{m-1}^m \cdot \sigma) = \sigma(x)$, où π_{m-1}^m est la projection de $\tilde{J}^m E$ sur $\tilde{J}^{m-1} E$. Nous avons $J^k E \subset \bar{J}^k E \subset \tilde{J}^k E$.

THEOREME I.7

Il existe un difféomorphisme canonique μ_k de $\bar{H}^k(V_n)$
sur $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$; ce difféomorphisme μ_k possède les
propriétés suivantes:

- (1) pour $k = 1$, le difféomorphisme μ_1 est
l'application identique de $H^1(V_n)$;
- (2) μ_k respecte les fibrations; plus précisé-
ment, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{H}^k(V_n) & \xrightarrow{\mu_k} & \bar{J}^{k-1}(H^1(V_n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_n & \xrightarrow{\text{id.}} & V_n
 \end{array}$$

(3) pour $0 < m < k$, on a la commutativité
du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}^k(V_n) & \xrightarrow{\mu_k} & \bar{J}^{k-1}(H^1(V_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{H}^m(V_n) & \xrightarrow{\mu_m} & \bar{J}^{m-1}(H^1(V_n)) \end{array}$$

La preuve se fait par récurrence. Pour $k = 1$, $J^0(H^1(V_n)) = H^1(V_n)$ par définition et μ_1 se réduit à l'application identique de $H^1(V_n)$. Soit $u = j_{e_1}^1 h$ un élément de $\bar{H}^2(V_n)$. Soit f le difféomorphisme local de R^n dans V_n défini par $\pi'_0 \circ h = f \circ \pi'_0$. Considérons la section locale de V_n dans $H^1(V_n)$ définie par $\sigma(x) = h \circ \eta_1 \circ f^{-1}(x)$, où η_1 est la section "nulle" de $H^1(R^n) = R^n \times L_n^1$. Nous posons $\mu_1(u) = j_x^1 \sigma$ où $x = \pi'_0(u)$. L'application différentiable μ_2 définit une injection de $\bar{H}^2(V_n)$ dans $\bar{J}^1(H^1(V_n))$; elle est aussi surjective. En effet, soit σ une section locale de V_n dans $H^1(V_n)$ définissant un élément $j_x^1 \sigma$ de $\bar{J}^1(H^1(V_n))$. Le but $\sigma(x)$ s'écrit sous la forme $\sigma(x) = j_0^1 f$, où f est un difféomorphisme local de R^n dans V_n . Soit h l'isomorphisme local de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$ défini par les conditions:

$$(i) \quad \pi'_0 \circ h = f \circ \pi'_0$$

$$(ii) \quad h \circ \eta_1 = \sigma \circ f.$$

Il est clair que h est admissible et que $j_x^1 \sigma = \mu_2(j_{e_1}^1 h)$. Nous avons ainsi un difféomorphisme μ_2 de $\bar{H}^2(V_n)$ sur

$\bar{J}^1(H^1(V_n))$ ayant les propriétés voulues. Supposons démontrée l'existence de μ_{k-1} tel que, pour tout u de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$, on ait $\mu_{k-1}(u) = j_u^1 \mu_{k-1} \circ u \circ j_0^1 \eta_{k-2}^{-1}$, où $u' = \pi_{k-2}^{k-1}(u)$, $w = \pi_1^k(u)$, et où η_{k-2} est la section "nulle" de $\bar{H}^{k-2}(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^{k-2}$. Soit $z = j_{e_{k-1}}^1 h$ un élément de $\bar{H}^k(V_n)$. Soit f le difféomorphisme local de R^n dans V_n tel que $\pi_0^{k-1} \circ h = f \circ \pi_0^{k-1}$. Nous désignerons par η_{k-1} la section "nulle" de $\bar{H}^{k-1}(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^{k-1}$. Le pseudoproduit $\mu_{k-1} \circ h \circ \eta_{k-1} \circ f^{-1} = h'$ définit une section locale de V_n dans $\bar{J}^{k-2}(H^1(V_n))$ et le 1-jet $j_x^1 h'$ définit un élément $\mu_k(z)$ de $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$ indépendant du choix de h pour z . On vérifie que l'application $z \rightarrow \mu_k(z)$ définit un difféomorphisme μ_k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$ satisfaisant aux conditions du théorème.

COROLLAIRE I.8 [16i]

L'espace $\bar{J}^{k-1}(H^1(V_n))$ est canoniquement difféomorphe à l'espace $\bar{P}^k(V_n)$.

5. Coordonnées locales de $\bar{H}^k(V_n)$.

Nous désignerons par $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ le système de coordonnées naturelles sur R^n . Soit $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U de V_n .

Un repère u du premier ordre de V_n au point $y = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in U$ est complètement déterminé par l'isomorphisme linéaire associé

$$\tilde{u} : T_0(R^n) \longrightarrow T_y(V_n).$$

En coordonnées locales, cet isomorphisme linéaire s'exprime par

$$\tilde{u} : r_i \longrightarrow y_i^m \bar{r}_m \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $r_i = (\partial/\partial x^i)_0$, $\bar{r}_m = (\partial/\partial y^m)_y$ et $\det(y_i^m) \neq 0$.

Le repère u est donc complètement déterminé par les coordonnées locales (y^i, y_k^j) avec $\det(y_k^j) \neq 0$.

On obtient ainsi un système de coordonnées locales sur l'ouvert $(\pi'_0)^{-1}(U)$ de $H^1(V_n)$. De même, on a un système de coordonnées globales (x^i, x_k^j) sur $H^1(R^n)$ dont l'élément distingué e_1 est donné par les coordonnées $(0, \delta_k^j)$.

Les $n + n^2$ vecteurs $\{s_i = (\partial/\partial x^i)_{e_1}, s_k^j = (\partial/\partial x_k^j)_{e_1}\}$ forment une base de l'espace vectoriel $E^1 = T_{e_1}(H^1(R^n))$. De même, les $n + n^2$ champs de vecteurs $\{\partial/\partial y^i, \partial/\partial y_k^j\}$ sont linéairement indépendants sur l'ouvert $(\pi'_0)^{-1}(U)$ de $H^1(V_n)$. Un repère semi-holonome v d'ordre 2 de V_n , dont la projection d'ordre 1 est $u = (y^i, y_k^j)$, est déterminé par l'isomorphisme linéaire $\tilde{v}$ de E^1 sur $T_u(H^1(V_n))$ associé à v . En coordonnées locales, $\tilde{v}$ est donné par :

6. Un critère d'holonomie.

Le but de ce paragraphe est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un repère d'ordre supérieur soit holonome. Rappelons qu'un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ définit un isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ de $\bar{E}^{k-1} = R^n \oplus \bar{E}_n^{k-1}$ sur $T_u(\bar{H}^{k-1}(V_n))$, où $u' = \pi_{k-1}^k(u)$. L'image de la composante R^n de $\bar{E}^{k-1}$ par $\tilde{u}$ s'appelle n -plan horizontal associé au repère u .

Dans le cas où $k=1$, il n'y a pas de distinction entre les repères semi-holonomes et les repères holonomes. Pour $k = 2$, nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION I.9

Un élément u de $\bar{H}^2(V_n)$ est holonome si et seulement si la 2-forme $d\theta_i$ s'annule sur le n -plan horizontal associé au repère u .

Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ une base de R^n . La forme canonique θ_i sur $H^1(V_n)$ s'écrit $\theta_i = \sum_i \theta^i r_i$. En termes de coordonnées locales $\{y^i, y_j^i\}$ sur $H^1(V_n)$, on peut exprimer les composantes par $\theta^i = \sum_j z_j^i dy^j$, où la matrice (z_j^i) est l'inverse de la matrice (y_j^i) .

Par différentiation extérieure, nous avons

$$d\theta^i = \sum \frac{\partial z_p^i}{\partial y_q^m} dy_q^m \wedge dy^p$$

Soit $u = (a^i, a_j^i, a_{jk}^i) \in \bar{H}^2(V_n)$. Le n -plan horizontal associé à u est engendré par les n vecteurs

$$X_i = a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{u'} + \frac{1}{2!} a_{ik}^j \left(\frac{\partial}{\partial y_k^j} \right)_{u'}$$

où $u' = \pi_1^2(u) = (a^i, a_j^i)$ et $1 \leq i \leq n$. La 2-forme $d\theta_1$ s'annule sur le n -plan horizontal associé à u si et seulement si

$$d\theta^i(X_j, X_k) = \sum \left(\frac{\partial z_m^i}{\partial y_q^p} \right)_{u'} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} a_{jq}^p & a_j^m \\ \frac{1}{2!} a_{kq}^p & a_k^m \end{vmatrix}$$

est nul pour tout $1 \leq i, j, k \leq n$. Puisque (z_j^i) est la matrice inverse de (y_j^i) , nous avons la relation :

$z_p^i y_k^p = \delta_k^i$. Par différentiation, nous avons

$$\left(\frac{\partial z_m^i}{\partial y_q^p} \right)_{u'} = -b_m^q b_p^i$$

où (b_j^i) est la matrice inverse de (a_j^i) . Par conséquent

$$\begin{aligned} d\theta^i(X_j, X_k) &= -\frac{1}{2} b_m^q b_p^i (a_k^m a_{jq}^p - a_j^m a_{kq}^p) \\ &= -\frac{1}{2} b_p^i (a_{jk}^p - a_{kj}^p) \end{aligned}$$

Puisque $\det(b_j^i) \neq 0$, on conclut que $d\theta^i(X_j, X_k) = 0$ pour tout $1 \leq i, j, k \leq n$ si et seulement si les coordonnées a_{jk}^i sont symétriques par rapport aux indices inférieurs i.e. si le repère $u = (a^i, a_j^i, a_{jk}^i)$ est holonome.

Dans le cas où $k > 2$, nous avons le résultat suivant:

THEOREME I.10

Pour qu'un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ soit holonome, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

- (i) le n -plan horizontal de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ associé au repère u est tangent à la sous-variété $H^{k-1}(V_n)$;
- (ii) la 2-forme $d\theta_{k-1}$ s'annule sur le n -plan horizontal associé au repère u .

Supposons que u est un repère holonome. Il existe alors un difféomorphisme local f de R^n dans V_n tel que $u = j_{e_{k-1}}^1 f^{(k-1)}$. Le difféomorphisme $f^{(k-1)}$ étant compatible avec les formes canoniques, c'est-à-dire $f^{(k-1)*} \theta_{k-1} = \hat{\theta}_{k-1}$, où $\hat{\theta}_{k-1}$ est la forme canonique sur $\bar{H}^{k-1}(R^n)$, nous avons $f^{(k-1)*} d\theta_{k-1} = d\hat{\theta}_{k-1}$. Or, la 2-forme $d\hat{\theta}_{k-1}$ est nulle sur la composante R^n de $\bar{E}^{k-1} = R^n \oplus \bar{E}_n^{k-1}$; il en résulte que $d\theta_{k-1}$ s'annule sur le n -plan horizontal associé au repère u . La première propriété est évidemment nécessaire.

Montrons que les conditions sont suffisantes. La première condition implique que la projection $u' = \pi_{k-1}^k(u)$ d'ordre $k-1$ est un repère holonome. De plus, il existe

un système de coordonnées locales $\{y^i, y_{j_1}^i, \dots, y_{j_1 \dots j_k}^i\}$ sur $\bar{H}^k(V_n)$ tel que u s'exprime en coordonnées locales par $(0, a_{j_1}^i, \dots, a_{j_1 \dots j_k}^i)$, où les coordonnées locales $a_{j_1 \dots j_m}^i$ sont symétriques par rapport aux indices inférieurs si $2 \leq m \leq k-1$ et où $a_{j_1 \dots j_k}^i$ est symétrique par rapport aux $k-1$ derniers indices inférieurs. Par un changement de coordonnées locales, nous pouvons même supposer que $a_j^i = \delta_j^i$ et $a_{j_1 \dots j_m}^i = 0$ pour $2 \leq m \leq k-1$.

Soit $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ le système de coordonnées naturelles sur R^n . On définit un système de coordonnées globales $\{x^i, x_{j_1}^i, \dots, x_{j_1 \dots j_m}^i\}$ sur $\bar{H}^m(R^n)$. Posons $z^\alpha = x_{j_1 \dots j_p}^i$ où $\alpha = i n^p + j_p n^{p-1} + \dots + j_1$. Les vecteurs $t_\alpha = (\partial/\partial z^\alpha)_{e_{k-2}}$ ($1 \leq \alpha \leq n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n$) forment une base de $\bar{E}^{k-2}$. La forme canonique θ_{k-1} s'écrit $\theta_{k-1} = \sum_\alpha \theta^\alpha t_\alpha$ relativement à la base $\{t_\alpha\}$.

Un élément $v = (y^i, y_{j_1}^i, \dots, y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i) \in \bar{H}^{k-1}(V_n)$ définit un isomorphisme linéaire $\tilde{v}$ de l'espace vectoriel $\bar{E}^{k-2}$ sur $T_v(\bar{H}^{k-2}(V_n))$, où $v' = \pi_{k-2}^{k-1}(v)$. En coordonnées locales, cet isomorphisme linéaire s'exprime par

$$\tilde{v} : t_\alpha \longrightarrow \sum_\beta A_\alpha^\beta \bar{t}_\beta$$

où $1 \leq \alpha, \beta \leq n^{k-1} + \dots + n$, et $\bar{t}_\alpha = (\partial/\partial \bar{z}^\alpha)_{v'}$,

avec $\bar{z}^\alpha = y_{j_1 \dots j_p}^i$. La matrice $A = (A_\alpha^\beta)$ est de

la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_j^i & A_j^w \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i, j \leq n \\ n < w \leq n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n \end{array}$$

où J est la matrice associée à l'isomorphisme linéaire Tv' . Nous avons donc $y_{j_1 \dots j_m}^i = A_{j_1}^i$ avec $\beta = i n^{m-1} + j_m n^{m-2} + \dots + j_2$. Soit $B = (B_\alpha^\beta)$ la matrice inverse de $A = (A_\alpha^\beta)$. Les composantes θ^α de θ_{k-1} s'écrivent

$$\theta^\alpha = \sum_\beta B_\beta^\alpha d\bar{z}^\beta.$$

Par différentiation extérieure, on obtient

$$d\theta^\alpha = \sum \left(\frac{\partial B_\beta^\alpha}{\partial \bar{z}^i} \right) d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^\beta + \sum \left(\frac{\partial B_\beta^\alpha}{\partial y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i} \right) dy_{j_1 \dots j_{k-1}}^i \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Or, $B_\mu^\alpha A_\lambda^\mu = \delta_\lambda^\alpha$. Par différentiation, nous avons

$$\frac{\partial B_\mu^\alpha}{\partial \bar{z}^i} = -B_\mu^\alpha B_\beta^\lambda \left(\frac{\partial A_\lambda^\mu}{\partial \bar{z}^i} \right),$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial B_\beta^\alpha}{\partial y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i} = -B_\mu^\alpha B_\beta^\lambda \left(\frac{\partial A_\lambda^\mu}{\partial y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i} \right),$$

$$d\theta^\alpha = - \sum B_\mu^\alpha B_\beta^\lambda \left(\frac{\partial A_\lambda^\mu}{\partial \bar{z}^i} \right) d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^\beta - \sum B_\mu^\alpha B_\beta^\lambda \left(\frac{\partial A_\lambda^\mu}{\partial y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i} \right) dy_{j_1 \dots j_{k-1}}^i \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Le n -plan horizontal de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$ associé au repère

$u = (0, \delta_j^i, 0, \dots, 0, a_{j_1 \dots j_k}^i)$ est engendré

par les n vecteurs

$$X_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^p} \right)_{u'} + \frac{1}{k!} a_{pj_1 \dots j_{k-1}}^i \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1 \dots j_{k-1}}^i} \right)_{u'}$$

où $u' = \pi_{k-1}^k(u)$ et $1 \leq p \leq n$.

La nullité de la 2-forme $d\theta_{k-1}$ sur le n -plan associé au repère u entraîne que $d\theta^\alpha(X_p, X_q) = 0$ pour tout indice $1 \leq p, q \leq n$ et $1 \leq \alpha \leq n^{k-1} + \dots + n$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 0 &= d\theta^\alpha(x_p, x_q) \\
 &= \sum B_\mu^\alpha(u') B_\rho^\lambda(u') \left(\frac{\partial A_\lambda^\mu}{\partial y^{j_1 \dots j_{k-1}}} \right)_{u'} \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{k!} a_{p j_1 \dots j_{k-1}}^i & A_p^\beta(u') \\ \frac{1}{k!} a_{q j_1 \dots j_{k-1}}^i & A_q^\beta(u') \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{k!} \sum B_\mu^\alpha(u') \delta_\rho^\mu (a_{p q j_2 \dots j_{k-1}}^i - a_{q p j_2 \dots j_{k-1}}^i)
 \end{aligned}$$

avec $\beta = i n^{k-2} + \dots + j_2$. Puisque $\det(B_\rho^\alpha(u')) \neq 0$, il en résulte que

$$a_{p q j_2 \dots j_{k-1}}^i = a_{q p j_2 \dots j_{k-1}}^i.$$

Par conséquent, les coordonnées $a_{j_1 j_2 \dots j_k}^i$ sont symétriques par rapport aux indices inférieurs et u est un repère holonome.

On dira qu'un élément u de $\bar{H}^k(V_n)$ est un repère quasi-holonome si le n -plan horizontal associé au repère u est tangent à la sous-variété $H^{k-1}(V_n)$ de $\bar{H}^{k-1}(V_n)$. Soit $\check{H}^k(V_n)$ l'ensemble des repères quasi-holonomes contenus dans $\bar{H}^k(V_n)$. De même, on définit $\check{H}^k(R^n)$; l'intersection $\check{L}_n^k = \bar{L}_n^k \cap \check{H}^k(R^n)$ est un sous-groupe de $\bar{L}_n^k$. Nous avons $H^k(V_n) \subset \check{H}^k(V_n) \subset \bar{H}^k(V_n)$. D'après le résultat précédent, un élément u de $\check{H}^k(V_n)$ est holonome si et seulement si la 2-forme $d\theta_{k-1}$ s'annule sur le n -plan horizontal associé au repère u .

7. Quelques remarques sur $\bar{H}^k(R^n)$.

Dans l'étude précédente, nous avons toujours identifié $\bar{H}^k(R^n)$ avec l'espace fibré trivial $R^n \times \bar{L}_n^k$. Un couple $(x, g) \in R^n \times \bar{L}_n^k$ s'identifie à l'élément $t_x^{(k)}(g) \in \bar{H}^k(R^n)$, où t_x est la translation de R^n amenant l'origine en x . Considérons l'espace tangent $\bar{E}^k$ au point distingué e_k de $\bar{H}^k(R^n)$; $\bar{E}^k$ est muni canoniquement d'une structure d'algèbre de Lie. En effet, soit $u = (x, g)$ un élément de $\bar{H}^k(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^k$. Le difféomorphisme $t_x^{(k)}$ induit sur $\bar{H}^k(R^n)$ commute avec les translations à droite définies par $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{H}^k(R^n)$. Les composés $t_x^{(k)} \circ R_g$ et $R_g \circ t_x^{(k)}$ donnent le même difféomorphisme de $\bar{H}^k(R^n)$ sur lui-même; nous le désignerons par t_u . Un champ de vecteurs sur $\bar{H}^k(R^n)$ sera dit invariant s'il est invariant par rapport aux difféomorphismes de la forme t_u , où u est un point arbitraire de $\bar{H}^k(R^n)$. Il est facile de voir qu'il existe une bijection entre les champs de vecteurs invariants sur $\bar{H}^k(R^n)$ et les éléments de $\bar{E}^k$. Soient X, Y deux champs de vecteurs invariants sur $\bar{H}^k(R^n)$. Le crochet $[X, Y]$ est encore un champ de vecteurs invariant sur $\bar{H}^k(R^n)$. L'espace vectoriel $\bar{E}^k$ est ainsi muni d'une structure d'algèbre de Lie sur le corps des nombres réels. L'algèbre de Lie $\bar{E}_n^k$ est une sous-algèbre de Lie de $\bar{E}^k$.

Soit W une variété différentiable. A toute application

différentiable f de W dans $\bar{H}^k(R^n)$ est associée une 1-forme extérieure $f^{-1}df$ sur W à valeurs dans $\bar{E}^k$; cette 1-forme est définie de la façon suivante: si $X \in T_x(W)$, $(f^{-1}df)(X) = (Tt_{f(x)}^{-1} \circ Tf)(X)$. En particulier, si $W = \bar{H}^k(R^n)$ et si f est l'application identique de $\bar{H}^k(R^n)$, nous avons une 1-forme différentielle ω sur $\bar{H}^k(R^n)$ à valeurs dans $\bar{E}^k$, appelée forme invariante sur $\bar{H}^k(R^n)$.

PROPOSITION I.11

La forme invariante ω sur $\bar{H}^k(R^n)$ satisfait à l'équation

$$d\omega + [\omega, \omega] = 0.$$

Rappelons que la forme $[\omega, \omega]$ est définie par: $[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$ pour deux champs de vecteurs X et Y sur $\bar{H}^k(R^n)$. Comme le module de tous les champs de vecteurs sur $\bar{H}^k(R^n)$ est engendré par les champs de vecteurs invariants, il suffit de vérifier l'équation dans le cas où X et Y sont deux champs de vecteurs invariants. Or, $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]) = -[\omega(X), \omega(Y)]$, d'où le résultat.

REMARQUE:

Nous avons adopté la convention suivante pour les

produits extérieurs:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, \dots, X_{p+q}) \\ = \sum (-1)^\varepsilon \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_p}) \beta(X_{i_{p+1}}, \dots, X_{i_{p+q}}),$$

où la sommation est effectuée par rapport à toutes les permutations $i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_{p+q}$ de $\{1, 2, \dots, p+q\}$ et où ε désigne l'indice de permutation.

Avec cette convention, nous avons la formule: si α est une p-forme, alors

$$d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) \\ = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})$$

Kumpera m'a signalé que la structure d'algèbre de Lie de $\bar{E}^k$ provient en fait d'une structure canonique de groupe sur $\bar{H}^k(R^n)$. Prenons l'identification de $R^n \times \bar{L}_n^k$ avec $\bar{H}^k(R^n)$, qui identifie le couple $(x, g) \in R^n \times \bar{L}_n^k$ avec l'élément $t_x^{(k)}(g) = t_x^{(k)} \circ R_g(e_k) = R_g \circ t_x^{(k)}(e_k)$ où e_k est l'élément distingué de $\bar{H}^k(R^n)$ correspondant à $(0, e)$, e étant l'élément neutre de $\bar{L}_n^k$. On a $(t_x^{(k)} \circ R_g) \circ (t_{x'}^{(k)} \circ R_{g'}) = t_x^{(k)} \circ t_{x'}^{(k)} \circ R_g \circ R_{g'} = t_{x+x'}^{(k)} \circ R_{g'g}$. Soit $t_{\bar{L}_n^k}^k$ l'ensemble $\bar{L}_n^k$ muni du transposé de la loi de groupe de $\bar{L}_n^k$, c'est-à-dire $g * h = hg$, où le premier membre est un composé dans $t_{\bar{L}_n^k}^k$ et où le deuxième membre est un composé dans $\bar{L}_n^k$. Moyennant l'identification on transporte la structure de groupe de Lie produit $R^n \times t_{\bar{L}_n^k}^k$

sur $\bar{H}^k(R^n)$ et on voit aussitôt que, si $u = (x, g)$ et $u' = (x', g')$, alors $uu' = (x+x', g'g) = t_{x+x'}^{(k)} \cdot R_{g'g}(e_k) = (t_x^{(k)} \cdot R_g) \cdot (t_{x'}^{(k)} \cdot R_{g'})(e_k) = (t_x^{(k)} \cdot R_g)(u') = t_u(u')$, où t_u est le difféomorphisme défini au début de ce paragraphe. L'application t_u n'est autre que la translation à gauche dans le groupe $\bar{H}^k(R^n)$. L'algèbre de Lie $\bar{E}^k$ définie précédemment est précisément l'algèbre de Lie de $\bar{H}^k(R^n)$. La forme invariante ω est donc simplement la forme de Maurer-Cartan du groupe.

C H A P I T R E I I

CONNEXIONS D'ORDRE SUPERIEUR

1. Connexions linéaires d'ordre supérieur.

On appelle connexion linéaire d'ordre k sur une variété différentiable V_n toute connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $\bar{H}^k(V_n)$ des repères semi-holonomes d'ordre k de V_n ; elle est déterminée par un champ d'éléments de contact différentiable sur $\bar{H}^k(V_n)$ complémentaire en chaque point à l'espace des vecteurs verticaux et invariant par rapport aux translations à droite de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{H}^k(V_n)$.

Soit ω_k la forme de connexion associée à une connexion linéaire d'ordre k sur V_n . On identifiera la connexion linéaire à ω_k . On désignera par D la différentiation covariante associée à ω_k . La 2-forme tensorielle $\Theta_k = D\theta_k$ (resp. $\Omega_k = D\omega_k$)

s'appellera forme de torsion (resp. forme de courbure)

de la connexion linéaire ω_k . La forme de torsion Θ_k

est à valeurs dans $\bar{E}^{k-1}$. Si Z est un vecteur tangent

à $\bar{H}^k(V_n)$ et si $g \in \bar{L}_n^k$, nous avons $\Theta_k(TR_g(Z)) =$

$\rho(g^{-1}) \Theta_k(Z)$, où ρ est la représentation linéaire

de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{E}^{k-1}$; et si Z est un vecteur vertical, $\Theta_k(Z) = 0$.

La représentation ρ de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{E}^{k-1}$ induit une représentation de $\bar{\mathcal{L}}_n^k$ sur $\bar{E}^{k-1}$: si $A \in \bar{\mathcal{L}}_n^k$, $\xi \in \bar{E}^{k-1}$, nous posons

$$A \cdot \xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \rho(a_t) \xi - \xi \},$$

où $a_t = \exp tA$ est le sous-groupe à 1-paramètre de $\bar{L}_n^k$ associé à $A \in \bar{\mathcal{L}}_n^k$. L'action de a_t sur la sous-algèbre $\bar{\mathcal{L}}_n^{k-1}$ de $\bar{E}^{k-1}$ n'est autre que l'action de $\pi_{k-1}^k(a_t)$ sur $\bar{\mathcal{L}}_n^{k-1}$ par la représentation adjointe. Si $\xi \in \bar{\mathcal{L}}_n^{k-1}$ et si $A \in \bar{\mathcal{L}}_n^k$, nous avons

$$A \cdot \xi = -[T \pi_{k-1}^k(A), \xi].$$

THEOREME II.1

Soit ω_k une connexion linéaire d'ordre k sur V_n .

Nous avons les équations de structure:

$$\Omega_k = d\omega_k + [\omega_k, \omega_k],$$

$$\Theta_k = d\theta_k + \omega_k \wedge \theta_k + 3 [T \pi_{k-1}^k \cdot \omega_k, T \pi_{k-1}^k \cdot \omega_k].$$

La première équation est bien connue. Montrons la deuxième équation:

$$\begin{aligned} \Theta_k(X, Y) &= d\theta_k(X, Y) + \omega_k(X) \cdot \theta_k(Y) - \omega_k(Y) \cdot \theta_k(X) \\ &\quad + 3 [T \pi_{k-1}^k \cdot \omega_k(X), T \pi_{k-1}^k \cdot \omega_k(Y)] \end{aligned}$$

pour tout $X \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$ et $Y \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$. Il suffit de vérifier la formule dans les trois cas suivants:

(i) X et Y sont des vecteurs horizontaux:

$\omega_k(X) = 0$, $\omega_k(Y) = 0$ et l'équation se réduit à la définition de Θ_k ;

(ii) X et Y sont des vecteurs verticaux:

nous pouvons supposer que $X = (A^*)_u$,
 $Y = (B^*)_u$, où A^* et B^* sont respective-
ment le champ fondamental correspondant à
 $A = \omega_k(X)$ et à $B = \omega_k(Y)$. Dans ce cas,
nous avons

$$\begin{aligned}\Theta_k(X, Y) &= 0 ; \\ d\Theta_k(X, Y) &= X \Theta_k(B^*) - Y \Theta_k(A^*) - \Theta_k([A^*, B^*]_u) \\ &= - \Theta_k([A^*, B^*]_u) \\ &= - [T\pi_{k-1}^k(A), T\pi_{k-1}^k(B)] ; \\ \omega_k(X) \cdot \Theta_k(Y) &= A \cdot \Theta_k((B^*)_u) \\ &= - [T\pi_{k-1}^k(A), T\pi_{k-1}^k(B)] ; \\ \omega_k(Y) \cdot \Theta_k(X) &= - [T\pi_{k-1}^k(B), T\pi_{k-1}^k(A)] ; \\ [T\pi_{k-1}^k \circ \omega_k(X), T\pi_{k-1}^k \circ \omega_k(Y)] \\ &= [T\pi_{k-1}^k(A), T\pi_{k-1}^k(B)] .\end{aligned}$$

L'équation est donc vérifiée.

(iii) X est vertical et Y est horizontal:

Soit $X = (A^*)_u$, où $A = \omega_k(X) \in \bar{E}_n^k$.

Nous pouvons étendre Y en un champ de
vecteurs horizontaux $\tilde{Y}$ sur $\bar{H}^k(V_n)$

invariant par rapport aux translations

à droite de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{H}^k(V_n)$. Ceci étant,

nous avons $d\Theta_k(X, Y) = X \Theta_k(\tilde{Y}) - Y \Theta_k(A^*) -$
 $\Theta_k([A^*, \tilde{Y}]_u)$. Comme $\Theta_k(A^*)$ est une

constante, $Y \theta_k(A^*) = 0$. $\tilde{Y}$ étant un champ de vecteurs horizontaux invariant, $[A^*, \tilde{Y}] = 0$. Soit $a_t = \exp tA$ le sous-groupe à 1-paramètre de $\bar{L}_n^k$ associé à $A \in \bar{L}_n^k$.
 $d\theta_k(X, Y) = (A^*)_u \theta_k(\tilde{Y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \rho(a_t^{-1}) \theta_k(\tilde{Y}) - \theta_k(\tilde{Y}) \}$
 $= -A \cdot \theta_k(Y)$. Or, $\omega_k(Y) = 0$, $\Theta_k(X, Y) = 0$ et
 $\omega_k(X) \cdot \theta_k(Y) = A \cdot \theta_k(Y)$. L'équation est vérifiée.

La projection π_m^k de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^m(V_n)$ étant compatible avec l'homomorphisme surjectif de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{L}_n^m$ ($m < k$), toute connexion linéaire ω_k d'ordre k induit par projection une connexion linéaire ω_m d'ordre m , où $\pi_m^k * \omega_m = T\pi_m^k \circ \omega_k$.

PROPOSITION II.2

Toute connexion linéaire ω_k d'ordre k induit canoniquement une connexion linéaire ω_m d'ordre inférieur m donnée par

$$\pi_m^k * \omega_m = T\pi_m^k \circ \omega_k.$$

Nous avons les relations:

$$\pi_m^k * \Omega_m = T\pi_m^k \circ \Omega_k,$$

$$\pi_m^k * \Theta_m = T\pi_{m-1}^{k-1} \circ \Theta_k.$$

Montrons simplement la deuxième formule. Nous savons que $\pi_m^k * \theta_m = \theta_m \cdot T\pi_m^k = T\pi_{m-1}^{k-1} \cdot \theta_k$. Par conséquent, $\pi_m^k * d\theta_m = T\pi_{m-1}^{k-1} \cdot d\theta_k$. De l'équation de structure

$$\Theta_m = d\theta_m + \omega_m \wedge \theta_m + 3 [T\pi_{m-1}^m \circ \omega_m, T\pi_{m-1}^m \circ \omega_m]$$

on déduit

$$\begin{aligned}
 \pi_m^{k*} \Theta_m &= \pi_m^{k*} d\theta_m + \pi_m^{k*} \omega_m \wedge \pi_m^{k*} \theta_m + 3 \left[T_{\pi_{m-1}^m} \circ \pi_m^{k*} \omega_m, T_{\pi_{m-1}^m} \circ \pi_m^{k*} \omega_m \right] \\
 &= T_{\pi_{m-1}^{k-1}} \circ d\theta_k + T_{\pi_{m-1}^k} \cdot \omega_k \wedge T_{\pi_{m-1}^{k-1}} \cdot \theta_k + 3 \left[T_{\pi_{m-1}^k} \cdot \omega_k, T_{\pi_{m-1}^k} \cdot \omega_k \right] \\
 &= T_{\pi_{m-1}^{k-1}} \circ \left\{ d\theta_k + \omega_k \wedge \theta_k + 3 \left[T_{\pi_{m-1}^k} \cdot \omega_k, T_{\pi_{m-1}^k} \cdot \omega_k \right] \right\} \\
 &= T_{\pi_{m-1}^{k-1}} \circ \Theta_k,
 \end{aligned}$$

d'où la formule cherchée.

COROLLAIRE II.3

Si la connexion linéaire ω_k d'ordre k est sans torsion (resp. sans courbure), il en est de même pour toute connexion ω_m projection de ω_k ($m < k$).

Nous dirons qu'une connexion linéaire ω_k d'ordre k est quasi-holonome si la restriction de ω_k à $T(H^k(V_n))$ définit une connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $H^k(V_n)$. Si ω_k est quasi-holonome, toute projection de ω_k par π_m^k est aussi quasi-holonome. La connexion canonique dans $\bar{H}^k(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^k$ est une connexion linéaire quasi-holonome sur R^n .

2. Connexions linéaires d'ordre 2.

Tout système de coordonnées locales sur V_n induit canoniquement un système de coordonnées locales sur

$\bar{H}^k(V_n)$. Soit u un élément de $\bar{H}^2(V_n)$ et soit $a_0 = \pi_0^2(u)$ sa projection sur V_n . Considérons un système de coordonnées locales $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ défini sur un voisinage ouvert de a_0 , le repère semi-holonyme u peut être représenté en coordonnées locales par $u = (x^i, x_j^i, x_{jk}^i)$ avec $\det(x_j^i) \neq 0$. Soit $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ un autre système de coordonnées locales défini sur un autre voisinage ouvert de a_0 ; le même repère u est représenté par les coordonnées $u = (y^i, y_j^i, y_{jk}^i)$. Les changements de coordonnées sont donnés par:

$$\begin{cases} y^i &= y^i(x) \\ y_j^i &= \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^m} \right) x_j^m \\ y_{jk}^i &= \left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} \right) x_m^i + \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) x_{pq}^i \end{cases}$$

Rappelons que $\bar{L}_n^2$ est par définition la fibre de $\bar{H}^2(R^n)$ située au-dessus de l'origine de R^n . Un élément g de $\bar{L}_n^2$ peut être représenté par les coordonnées $g = (0, a_j^i, a_{jk}^i)$ avec $\det(a_j^i) \neq 0$. Pour simplifier la notation, les éléments de $\bar{L}_n^2$ seront représentés par des couples (a_j^i, a_{jk}^i) avec $\det(a_j^i) \neq 0$. La loi de composition dans $\bar{L}_n^2$ est donnée par

$$(a_j^i, a_{jk}^i)(b_j^i, b_{jk}^i) = (a_m^i b_j^m, a_m^i b_{jk}^m + a_{pq}^i b_j^p b_k^q).$$

L'opération à droite de $\bar{L}_n^2$ sur R_n^2 s'exprime par

$$(x^i, x_j^i, x_{jk}^i)(a_j^i, a_{jk}^i) = (x^i, x_m^i a_j^m, x_m^i a_{jk}^m + x_{pq}^i a_j^p a_k^q).$$

Un élément $u = (x^i, x_j^i, x_{jk}^i)$ de $\bar{H}^2(V_n)$ est holonome si et seulement si les coordonnées x_{jk}^i sont symétriques par rapport aux indices inférieurs. Soit S la symétrisation de $\bar{H}^2(V_n)$ sur $H^2(V_n)$ définie par $S(x^i, x_j^i, x_{jk}^i) = (x^i, x_j^i, \frac{1}{2}(x_{jk}^i + x_{kj}^i))$; elle est globalement définie sur $\bar{H}^2(V_n)$. La symétrisation de $\bar{H}^2(R^n)$ sur $H^2(R^n)$ induit un homomorphisme de groupes S_L de $\bar{L}_n^2$ sur L_n^2 . De plus, la symétrisation de $\bar{H}^2(V_n)$ sur $H^2(V_n)$ est compatible avec l'homomorphisme S_L . Toute connexion infinitésimale $\bar{\omega}_2$ dans $\bar{H}^2(V_n)$ induit donc une connexion infinitésimale ω_2 dans $H^2(V_n)$ donnée par $S^* \omega_2 = TS_L \cdot \bar{\omega}_2$. La connexion induite s'appellera la symétrisée de $\bar{\omega}_2$. Puisque S laisse invariant chaque élément de $H^2(V_n)$, une connexion linéaire d'ordre 2 sur V_n est quasi-holonome si et seulement si la restriction de $\bar{\omega}_2$ à $T(H^2(V_n))$ coïncide avec la symétrisée de $\bar{\omega}_2$.

Considérons l'automorphisme α de $\bar{L}_n^2$ défini par $\alpha(a_j^i, a_{jk}^i) = (a_j^i, a_{kj}^i)$. Il est évident que l'automorphisme α laisse invariant chaque élément de L_n^2 et que α^2 est l'identité.

PROPOSITION II.4

Il existe canoniquement un automorphisme involutif α de $\bar{L}_n^2$, de sorte que L_n^2 soit le sous-groupe des éléments invariants de $\bar{L}_n^2$.

THEOREME II.5

L'espace homogène L_n^2/L_n^2 est réductif : il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{L}}_n^2$ de L_n^2 tel que

$$\bar{\mathfrak{L}}_n^2 = \mathfrak{L}_n^2 \oplus \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \text{ad}(L_n^2)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

où $\mathfrak{L}_n^2$ est l'algèbre de Lie de L_n^2 .

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme suivant:

LEMME II.6 [8a]

Soit α un automorphisme involutif d'un groupe de Lie $\bar{G}$. L'ensemble G des éléments invariants par rapport à α forme un sous-groupe de $\bar{G}$. De plus, l'espace homogène $\bar{G}/G$ est réductif : il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$, algèbre de Lie de $\bar{G}$, tel que

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G . L'espace $\mathfrak{m}$ peut être donné par

$$\mathfrak{m} = \{ \lambda \in \bar{\mathfrak{g}}; T\alpha(\lambda) = -\lambda \}.$$

En effet, tout élément X de $\bar{\mathfrak{g}}$ s'écrit

$$X = \frac{1}{2} (X + T\alpha(X)) + \frac{1}{2} (X - T\alpha(X)).$$

Puisque $\alpha^2 = \text{identité}$; nous avons $X + T\alpha(X) \in \mathfrak{g}$

et $X - T\alpha(X) \in \mathfrak{m}$. Par conséquent $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$

car $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. Soit π la projection de $\bar{\mathfrak{g}}$

sur $\mathfrak{g}$ définie par $\pi(X) = \frac{1}{2} (X + T\alpha(X))$. Pour montrer que $\text{ad}(G)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, il suffit de vérifier que $\pi(\text{ad}(g)X) = \text{ad}(g)\pi(X)$ pour tout $X \in \bar{\mathfrak{g}}$ et $g \in G$. Si $X \in \mathcal{M}$, alors $\pi(X) = 0$. Nous avons donc $\pi(\text{ad}(g)X) = 0$, ce qui entraîne que $\text{ad}(g)X \in \mathcal{M}$. Montrons que $\pi(\text{ad}(g)X) = \text{ad}(g)\pi(X)$: nous avons $\pi(\text{ad}(g)X) = \frac{1}{2} (\text{ad}(g)X + T\alpha(\text{ad}(g)X)) = \frac{1}{2} \text{ad}(g)(X + T\alpha(X)) = \text{ad}(g)\pi(X)$, car α laisse invariant chaque élément de G . Ainsi s'achève la démonstration du lemme.

Soit $\mathcal{M}$ le sous-espace vectoriel de $\bar{\mathfrak{L}}_n^2$ défini dans le lemme précédent. Si $X \in \mathcal{M}$, $Y \in \mathcal{M}$, $T\alpha([X, Y]) = [T\alpha(X), T\alpha(Y)] = [-X, -Y] = [X, Y]$, ce qui montre que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. On obtient donc $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathfrak{L}_n^2$, d'où le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.7

L'espace homogène $\bar{\mathfrak{L}}_n^2 / \mathfrak{L}_n^2$ est un espace symétrique.

Désormais, nous fixons une fois pour toutes une décomposition de $\bar{\mathfrak{L}}_n^2 = \mathfrak{L}_n^2 \oplus \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est l'espace vectoriel défini dans le théorème II.5. Nous désignerons par i l'injection canonique de $H^2(V_n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$.

Soit $\bar{\omega}_2$ une connexion infinitésimale dans l'espace

fibré principal $\bar{H}^2(V_n)$. La forme $i^* \bar{\omega}_2$ se décompose en deux termes $i^* \bar{\omega}_2 = \omega_2 + t$, où ω_2 (resp. t) est la $\mathfrak{L}_n^2$ -composante (resp. la $\mathcal{M}$ -composante) de $i^* \bar{\omega}_2$. Puisque $\text{ad}(\mathcal{L}_n^2) \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, la 1-forme ω_2 définit une connexion infinitésimale dans $H^2(V_n)$ qu'on appellera connexion quasi-holonomie associée à la connexion $\bar{\omega}_2$. La forme t est une 1-forme tensorielle sur $H^2(V_n)$, appelée forme de quasi-holonomie.

Réciproquement, les données ω_2 et t déterminent une connexion infinitésimale $\bar{\omega}_2$ dans l'espace fibré principal $\bar{H}^2(V_n)$, de sorte que $i^* \bar{\omega}_2 = \omega_2 + t$. En effet, si $\xi \in T_u(\bar{H}^2(V_n))$ où $u \in H^2(V_n)$, nous avons une décomposition $\xi = \xi' + \xi''$, où ξ' est un vecteur horizontal relativement à la connexion infinitésimale ω_2 et où ξ'' est un vecteur vertical. Nous posons $\bar{\omega}_2(\xi) = t(\xi') + u^{-1}(\xi'')$. Si $\bar{\xi} \in T_v(\bar{H}^2(V_n))$ où $v \in H^2(V_n)$, il existe un $u \in H^2(V_n)$ et un $g \in \mathcal{L}_n^2$ tels que $v = ug$. De plus, $\bar{\xi} = \text{TR}_g(\xi)$ pour un $\xi \in T_u(\bar{H}^2(V_n))$. La valeur $\bar{\omega}_2(\bar{\xi}) = \text{ad}(g^{-1}) \bar{\omega}_2(\xi)$ ne dépend pas du choix de u et de g . L'application $\xi \longrightarrow \bar{\omega}_2(\xi)$ définit une connexion infinitésimale $\bar{\omega}_2$ dans l'espace fibré principal $\bar{H}^2(V_n)$ et on a $i^* \bar{\omega}_2 = \omega_2 + t$. On énoncera

PROPOSITION II.8

Il y a une bijection entre l'ensemble des connexions linéaires $\bar{\omega}_2$ d'ordre 2 sur V_n et l'ensemble des couples (ω_2, t) , où ω_2 est une connexion infinitésimale dans $H^2(V_n)$ et où t est une 1-forme tensorielle sur $H^2(V_n)$ à valeurs dans $\mathcal{M}$; la correspondance est donnée par

$$i^* \bar{\omega}_2 = \omega_2 + t .$$

COROLLAIRE II.9

La connexion linéaire $\bar{\omega}_2$ d'ordre 2 sur V_n est quasi-holonome si et seulement si la forme de quasi-holonomie est nulle.

Soit φ une forme tensorielle sur l'espace fibré principal $\bar{H}^2(V_n)$. De l'équation de structure

$$\bar{D}\varphi = d\varphi + \bar{\omega}_2 \wedge \varphi ,$$

où $\bar{D}\varphi$ est la différentielle absolue de φ par rapport à $\bar{\omega}_2$, on déduit

$$\begin{aligned} i^* (\bar{D}\varphi) &= i^* d\varphi + i^* \bar{\omega}_2 \wedge i^* \varphi \\ &= d(i^* \varphi) + i^* \bar{\omega}_2 \wedge i^* \varphi \\ &= d(i^* \varphi) + \omega_2 \wedge i^* \varphi + t \wedge i^* \varphi . \end{aligned}$$

La forme $i^* \varphi$ est une forme tensorielle sur $H^2(V_n)$ et on a

$$D(i^* \varphi) = d(i^* \varphi) + \omega_2 \wedge i^* \varphi ,$$

où $D(i^*\varphi)$ est la différentielle absolue de $i^*\varphi$ par rapport à ω_2 , d'où la formule

$$i^*(\bar{D}\varphi) = D(i^*\varphi) + t \wedge i^*\varphi.$$

Soit $\bar{\Omega}_2$ (resp. Ω_2) la forme de courbure de $\bar{\omega}_2$ (resp. ω_2). De l'équation de structure

$$\bar{\Omega}_2 = d\bar{\omega}_2 + [\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2]$$

on déduit

$$\begin{aligned} i^*\bar{\Omega}_2 &= i^*(d\bar{\omega}_2) + i^*([\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2]) \\ &= d(i^*\bar{\omega}_2) + [i^*\bar{\omega}_2, i^*\bar{\omega}_2] \\ &= \Omega_2 + Dt + [t, t]. \end{aligned}$$

La forme $Dt + [t, t]$ est une 2-forme tensorielle sur l'espace fibré principal $H^2(V_n)$, appelée courbure de quasi-holonomie de $\bar{\omega}_2$.

De l'équation de structure

$$\bar{\Theta}_2 = d\theta_2 + \bar{\omega}_2 \wedge \theta_2 + 3[\tau\pi_1^2 \cdot \bar{\omega}_2, \tau\pi_1^2 \cdot \bar{\omega}_2]$$

on déduit

$$\begin{aligned} i^*\bar{\Theta}_2 &= i^*d\theta_2 + i^*\bar{\omega}_2 \wedge i^*\theta_2 + 3[\tau\pi_1^2 \cdot i^*\bar{\omega}_2, \tau\pi_1^2 \cdot i^*\bar{\omega}_2] \\ &= d(i^*\theta_2) + \omega_2 \wedge i^*\theta_2 + t \wedge i^*\theta_2 \\ &\quad + 3[\tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t), \tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t)] \\ &= \Theta_2 + t \wedge i^*\theta_2 + 3[\tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t), \tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t)]. \end{aligned}$$

La forme

$$\begin{aligned} T &= t \wedge i^*\theta_2 + 3[\tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t), \tau\pi_1^2 \cdot (\omega_2 + t)] \\ &\quad - 3[\tau\pi_1^2 \cdot \omega_2, \tau\pi_1^2 \cdot \omega_2] \end{aligned}$$

est une 2-forme tensorielle sur $H^2(V_n)$, appelée torsion de quasi-holonomie de $\bar{\omega}_2$.

Si la connexion linéaire $\bar{\omega}_2$ d'ordre 2 est quasi-holonyme, la forme de quasi-holonomie t associée est nulle. Par conséquent, la courbure de quasi-holonomie et la torsion de quasi-holonomie sont nulles.

PROPOSITION II.10 [18]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans $\bar{H}^2(V_n)$ une connexion infinitésimale $\bar{\omega}_2$ à courbure nulle induisant ω_2 et t est que les données ω_2 et t vérifient l'équation

$$\Omega_2 + Dt + [t, t] = 0.$$

L'étude précédente montre que la condition est nécessaire. Réciproquement, si la condition est vérifiée, la forme de courbure $\bar{\Omega}_2$ est nulle. En effet, $i^* \bar{\Omega}_2 = \Omega_2 + Dt + [t, t] = 0$. Si $u \in H^2(V_n)$, les vecteurs verticaux de $T_u(\bar{H}^2(V_n))$ et les vecteurs tangents à $H^2(V_n)$ engendrent tout l'espace vectoriel $T_u(\bar{H}^2(V_n))$. Puisque $\bar{\Omega}_2$ est une 2-forme tensorielle sur $\bar{H}^2(V_n)$, on déduit $\bar{\Omega}_2 = 0$.

De même, on démontre

PROPOSITION II.11

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans $\bar{H}^2(V_n)$ une connexion infinitésimale $\bar{\omega}_2$ à torsion nulle induisant ω_2 et t est que l'équation suivante soit vérifiée :

$$\Theta_2 + T + 3 [T\pi_1^2 \cdot \omega_2 , T\pi_1^2 \cdot \omega_2] = 0.$$

3. $\mathcal{E}$ -connexions.

Soit u un élément de L_n^1 . Il existe une application linéaire et une seule f de R^n sur R^n telle que $u = j_0^1 f$. Le prolongement $f^{(k-1)}$ est un isomorphisme admissible de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ sur lui-même; il définit donc un élément $\mathcal{C}^k(u) = j_{e_{k-1}}^1 f^{(k-1)}$ de L_n^k . L'application $u \rightarrow \mathcal{C}^k(u)$ est une injection de L_n^1 dans L_n^k qui définit d'ailleurs un homomorphisme de groupes. Pour $m < k$, $\mathcal{C}^m = \pi_n^* \cdot \mathcal{C}^k$. Le sous-groupe $\mathcal{C}^k(L_n^1)$ de $\bar{L}_n^k$ laisse invariantes les composantes de $\bar{E}^{k-1} = R^n \oplus \bar{E}_n^{k-1}$ et l'opération de $\mathcal{C}^k(L_n^1)$ sur la composante R^n de $\bar{E}^{k-1}$ s'identifie à l'opération de L_n^1 sur R^n .

On appelle $\mathcal{E}$ -connexion d'ordre k sur V_n une section invariante de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$, c'est-à-dire un relèvement de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ compatible avec l'homomorphisme canonique $\mathcal{C}^{k+1}$ de L_n^1 dans $\bar{L}_n^{k+1}$, ou encore une réduction du groupe structural $\bar{L}_n^{k+1}$ de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$

à L_n^1 . Il y a une bijection entre les ensembles des $\mathcal{E}$ -connexions d'ordre k sur V_n et des connexions semi-holonomes d'ordre k au sens de Ehresmann définies dans l'espace fibré principal $H^1(V_n)$ [6j], [16i].

Soit φ_{k+1} une section invariante de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ définissant une $\mathcal{E}$ -connexion d'ordre k sur V_n . Pour $1 \leq m < k$, la composée $\varphi_{m+1} = \pi_{m+1}^{k+1} \circ \varphi_{k+1}$ est une section invariante de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{m+1}(V_n)$.

Toute $\mathcal{E}$ -connexion d'ordre k induit canoniquement une

$\mathcal{E}$ -connexion d'ordre m ($m < k$). Nous dirons que

φ_{m+1} est la projection de φ_{k+1} par π_{m+1}^{k+1} .

Une $\mathcal{E}$ -connexion φ_{k+1} sera dite symétrique ou holonome (resp. quasi-holonome) si le relèvement φ_{k+1} est à valeurs dans $H^{k+1}(V_n)$ (resp. $\check{H}^{k+1}(V_n)$). Si

φ_{k+1} est symétrique (resp. quasi-holonome), toute projection de φ_{k+1} par π_{m+1}^{k+1} est symétrique.

Soit donnée une $\mathcal{E}$ -connexion φ_{k+1} d'ordre k sur V_n . Nous posons $\varphi_k = \pi_k^{k+1} \circ \varphi_{k+1}$. Pour tout élément $u \in H^1(V_n)$, son relèvement $\varphi_{k+1}(u) \in \bar{H}^{k+1}(V_n)$ détermine un n -plan horizontal de $\bar{H}^k(V_n)$ au point

$\varphi_k(u) \in \bar{H}^k(V_n)$. Nous avons ainsi un champ local de n -plans de $\bar{H}^k(V_n)$ défini sur $\varphi_k(H^1(V_n))$. Le sous-groupe $\mathcal{U}^{k+1}(L_n^1)$ de $\bar{L}_n^{k+1}$ laisse invariante les composantes de $\bar{E}^k = R^n \oplus \bar{E}_n^k$; le relèvement φ_{k+1}

étant compatible avec l'homomorphisme canonique ι^{k+1} de L_n^1 dans $\bar{L}_n^{k+1}$, le champ local en question est invariant par rapport aux translations à droite définies par les éléments de $\iota^k(L_n^1)$. Par conséquent, le champ local s'étend en un champ global de n -plans de $\bar{H}^k(V_n)$ complémentaire en chaque point à l'espace des vecteurs verticaux de $\bar{H}^k(V_n)$ et invariant par rapport aux translations de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{H}^k(V_n)$. Toute

ξ -connexion φ_{k+1} détermine ainsi une connexion linéaire d'ordre k sur la même variété. Si φ_{k+1} est quasi-holonome, il en est de même pour la connexion linéaire ω_k associée. Il est à signaler que la projection ω_m de ω_k par π_m^k est précisément la connexion linéaire d'ordre m associée à $\varphi_{m+1} = \pi_{m+1}^{k+1} \circ \varphi_{k+1}$. On démontrera plus loin que cette correspondance entre les ξ -connexions et les connexions linéaires d'ordre supérieur est biunivoque.

Considérons un système de coordonnées locales $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ défini sur un ouvert U de V_n . Relativement aux systèmes de coordonnées locales induits, tout relèvement φ_{k+1} de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ s'écrit $(x^i, x_j^i) \rightarrow \varphi_{k+1}(x^i, x_j^i) = (x^i, x_j^i, \dots, x_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}^i)$. Si φ_{k+1} est compatible avec l'injection canonique de L_n^1 dans $\bar{L}_n^{k+1}$, c'est-à-dire si φ_{k+1} définit une

$\mathcal{E}$ -connexion d'ordre k sur V_n , les fonctions $x_{j_1 j_2}^i, \dots, \dots, x_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}^i$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{j_1 j_2}^i = - \Gamma_{m_1 m_2}^i x_{j_1}^{m_1} x_{j_2}^{m_2} \\ x_{j_1 j_2 j_3}^i = - \Gamma_{m_1 m_2 m_3}^i x_{j_1}^{m_1} x_{j_2}^{m_2} x_{j_3}^{m_3} \\ \dots \dots \dots \\ x_{j_1 j_2 \dots j_{k+1}}^i = - \Gamma_{m_1 m_2 \dots m_{k+1}}^i x_{j_1}^{m_1} x_{j_2}^{m_2} \dots x_{j_{k+1}}^{m_{k+1}} \end{array} \right.$$

où $\Gamma_{m_1 m_2}^i, \dots, \Gamma_{m_1 m_2 \dots m_{k+1}}^i$ sont des fonctions différentiables définies sur l'ouvert U de V_n . Les fonctions $\Gamma_{m_1 m_2}^i, \dots, \Gamma_{m_1 \dots m_{k+1}}^i$ sont les symboles de Christoffel de la $\mathcal{E}$ -connexion φ_{k+1} . Les quantités $\Gamma_{m_1 m_2}^i, \dots, \Gamma_{m_1 \dots m_{k+1}}^i$ ne sont pas arbitraires; ils doivent satisfaire à certaines conditions si l'on effectue un changement de coordonnées. Une $\mathcal{E}$ -connexion φ_{k+1} est symétrique si et seulement si les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices inférieurs.

Etudions les effets sur les symboles de Christoffel quand on effectue un changement de coordonnées. Nous nous bornons aux cas particuliers:

(i) Cas où $k = 1$:

Soit Γ_{rs}^i les symboles de Christoffel d'une $\mathcal{E}$ -connexion du premier ordre relativement à un système

de coordonnées locales $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ défini sur un ouvert U de V_n . Soit $\bar{\Gamma}_{rs}^i$ les symboles de Christoffel de la même $\bar{\xi}$ -connexion relativement à un autre système de coordonnées locales $\{\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n\}$ défini sur un ouvert $\bar{U}$ de V_n . Si l'intersection $U \cap \bar{U}$ n'est pas vide, on obtient facilement la formule

$$\Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \right)$$

qui est la formule classique pour les symboles de Christoffel d'une connexion linéaire du premier ordre.

Les quantités Γ_{jk}^i définissent donc une connexion linéaire du premier ordre sur V_n . D'autre part, nous avons vu qu'une ξ -connexion φ_2 induit canoniquement une connexion linéaire ω_1 sur V_n . Les quantités Γ_{jk}^i sont, en réalité, les symboles de Christoffel de la connexion linéaire ω_1 associée. En effet, si $X_j = x_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$ ($1 \leq j \leq n$) est une base de $T_x(V_n)$, où $x \in U$, le relèvement horizontal de X_j au point $u = (x^1, x_j^1) \in H^1(V_n)$ relativement à la connexion linéaire ω_1 est donné par

$$X_j^* = x_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_u + x_{jk}^i \left(\frac{\partial}{\partial x_j^i} \right)_u,$$

où $x_{jk}^i = -\Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s$. Soit $r_i^j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j^i} \right)_{e_1}$ ($1 \leq i, j \leq n$) une base de $\mathcal{L}_n^1$. Les composantes de $\omega_1 = \sum \omega_j^i r_i^j$ sont données par

$$\omega_j^i = y_k^i \left(dx_j^k + C_{mp}^k x_j^p dx^m \right),$$

où (y_k^i) est la matrice inverse de (x_k^i) et où C_{mp}^k sont les symboles de Christoffel classiques de la connexion linéaire ω_1 . Par conséquent, nous avons

$$\omega_j^i(x_k^*) = 0 \text{ pour tout indice } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Il en résulte que $x_{j k}^i = -\Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s = -C_{rs}^i x_j^r x_k^s$, ce qui entraîne que $\Gamma_{j k}^i = C_{j k}^i$.

PROPOSITION II.12

(i) Il y a une bijection entre les ensembles des connexions linéaires du premier ordre sur V_n et des sections invariantes de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$;

(ii) Deux connexions linéaires du premier ordre sur V_n possèdent la même torsion si et seulement si les deux sections invariantes correspondantes envoient $H^1(V_n)$ dans le même sous-espace fibré principal de groupe structural L_n^2 de $\bar{H}^2(V_n)$.

Il reste à montrer la deuxième partie de la proposition. Soient φ_2 et $\bar{\varphi}_2$ deux sections invariantes de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$. Relativement à un système de coordonnées locales $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ défini sur un ouvert U de V_n , les deux $\mathcal{E}$ -connexions sont données par

$$\begin{aligned} (x^i, x_j^i) &\rightarrow \varphi_2(x^i, x_j^i) = (x^i, x_j^i, -\Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s), \\ (x^i, x_j^i) &\rightarrow \bar{\varphi}_2(x^i, x_j^i) = (x^i, x_j^i, -\bar{\Gamma}_{rs}^i x_j^r x_k^s), \end{aligned}$$

où Γ_{jk}^i et $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ sont les symboles de Christoffel correspondants. Puisque $\varphi_2(x^i, x_j^i)$ et $\bar{\varphi}_2(x^i, x_j^i)$ sont sur la même fibre de $\bar{H}^2(V_n)$, il existe un élément $(\delta_j^i, g_{jk}^i) \in \bar{M}_n^2 = \text{Ker}(\bar{L}_n^2 \longrightarrow L_n^1)$ tel que

$$(x^i, x_j^i, -\bar{\Gamma}_{rs}^i x_j^r x_k^s) = (x^i, x_j^i, -\Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s)(\delta_j^i, g_{jk}^i).$$

On déduit

$$\bar{\Gamma}_{rs}^i x_j^r x_k^s = \Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s - x_m^i g_{jk}^m.$$

Par conséquent, on a

$$(*) \quad (\bar{\Gamma}_{rs}^i - \bar{\Gamma}_{sr}^i) x_j^r x_k^s = (\Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i) x_j^r x_k^s - x_m^i (g_{jk}^m - g_{kj}^m).$$

Si les deux connexions linéaires possèdent la même torsion, $\Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i = \bar{\Gamma}_{rs}^i - \bar{\Gamma}_{sr}^i$, on déduit $x_m^i (g_{jk}^m - g_{kj}^m) = 0$. Comme $\det(x_m^i) \neq 0$, on obtient $g_{jk}^m = g_{kj}^m$, ce qui entraîne que $(\delta_j^i, g_{jk}^i) \in M_n^2 = \bar{M}_n^2 \cap L_n^2$, d'où la nécessité.

Si les images de $H^1(V_n)$ par φ_2 et $\bar{\varphi}_2$ sont contenues dans le même sous-espace fibré principal de groupe structural L_n^2 , on a toujours la formule (*) avec $g_{jk}^m = g_{kj}^m$. Par conséquent,

$$(\bar{\Gamma}_{rs}^i - \bar{\Gamma}_{sr}^i) x_j^r x_k^s = (\Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i) x_j^r x_k^s.$$

Comme $\det(x_j^i) \neq 0$, on déduit

$$\bar{\Gamma}_{rs}^i - \bar{\Gamma}_{sr}^i = \Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i.$$

Les deux connexions linéaires possèdent donc la même torsion.

(ii) Cas où $k = 2$:

Un élément de $\bar{L}_n^3$ peut être représenté par des coordonnées locales $(a_j^i, a_{jk}^i, a_{jkm}^i)$ avec $\det(a_j^i) \neq 0$. La loi de composition dans $\bar{L}_n^3$ est donnée par:

$$\begin{aligned} & (a_j^i, a_{jk}^i, a_{jkm}^i)(b_j^i, b_{jk}^i, b_{jkm}^i) \\ &= (a_r^i b_j^r, a_{rs}^i b_j^r b_k^s + a_r^i b_{jk}^r, a_{rst}^i b_j^r b_k^s b_m^t + \\ & \quad a_{rs}^i b_{jk}^r b_m^s + a_{rs}^i b_k^r b_{jm}^s + a_{rs}^i b_j^r b_{km}^s + a_r^i b_{jkm}^r). \end{aligned}$$

Soit $u = (x^i, x_j^i, x_{jk}^i, x_{jkm}^i)$ un élément de $\bar{H}^3(V_n)$. L'opération à droite de $\bar{L}_n^3$ sur $\bar{H}^3(V_n)$ s'exprime par

$$\begin{aligned} & (x^i, x_j^i, x_{jk}^i, x_{jkm}^i)(a_j^i, a_{jk}^i, a_{jkm}^i) \\ &= (x^i, x_r^i a_j^r, x_{rs}^i a_j^r a_k^s + x_r^i a_{jk}^r, x_{rst}^i a_j^r a_k^s a_m^t + \\ & \quad x_{rs}^i a_{jk}^r a_m^s + x_{rs}^i a_k^r a_{jm}^s + x_{rs}^i a_j^r a_{km}^s + x_r^i a_{jkm}^r). \end{aligned}$$

Toute ξ -connexion φ_3 d'ordre 2 s'écrit localement en termes de coordonnées

$$(x^i, x_j^i) \longrightarrow (x^i, x_j^i, -\Gamma_{rs}^i x_j^r x_k^s, -\Gamma_{rst}^i x_j^r x_k^s x_m^t),$$

où Γ_{rs}^i et Γ_{rst}^i sont les symboles de Christoffel.

Si $\tilde{\Gamma}_{rs}^i$ et $\tilde{\Gamma}_{rst}^i$ sont les symboles de Christoffel

de la même ξ -connexion φ_3 relativement à un autre

système de coordonnées locales, on a les formules suivantes

sur la partie commune où les symboles de Christoffel sont définis:

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \right), \\ \bar{\Gamma}_{jkm}^i &= \left(\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \right) \left(\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} \right) \left(\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} \right) \left\{ \Gamma_{rst}^\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \right) - \left(\frac{\partial^3 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^s \partial x^t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{rs}^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\alpha \partial x^t} \right) + \Gamma_{rt}^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^s \partial x^\alpha} \right) + \Gamma_{st}^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^r \partial x^\alpha} \right) \right\}.\end{aligned}$$

On obtient par des calculs directs les résultats suivants:

PROPOSITION II.13

Soient Γ_{jk}^i , Γ_{jkm}^i les symboles de Christoffel d'une $\mathcal{E}$ -connexion d'ordre 2 sur V_n . Si la connexion projection du premier ordre est symétrique, les quantités

$$\begin{aligned}A_{jkm}^i &= \Gamma_{jkm}^i - \Gamma_{kjm}^i, \\ B_{jkm}^i &= \Gamma_{jkm}^i - \Gamma_{mkj}^i, \\ C_{jkm}^i &= \Gamma_{jkm}^i - \Gamma_{jmk}^i\end{aligned}$$

sont respectivement les composantes d'un tenseur de type (1,3) sur V_n et la $\mathcal{E}$ -connexion est symétrique si et seulement si les trois tenseurs sont nuls.

4. Espaces fibrés vectoriels $\bar{S}^{kT}$ et S^{kT} .

Le groupe de Lie $\bar{L}_n^{k+1}$ (resp. L_n^{k+1}) opère linéairement à gauche sur l'espace vectoriel $\bar{E}^k$ (resp. $E^k = T_{e_k}(H^k(R^n))$) par la représentation ρ . Nous désignerons par $\bar{S}^{kT}$ (resp. S^{kT}) l'espace fibré vectoriel associé à $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ (resp. $H^{k+1}(V_n)$)

obtenu en modelant $\bar{E}^k$ (resp. E^k) sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ (resp. $H^{k+1}(V_n)$). Dans le cas où $k = 0$, $S^0T = T(V_n)$.

PROPOSITION II.14

L'espace fibré vectoriel $\bar{S}^kT$ (resp. S^kT) est canoniquement isomorphe à l'espace fibré vectoriel $T(\bar{H}^k(V_n))/\bar{L}_n^k$ (resp. $T(H^k(V_n))/L_n^k$).

En effet, un élément u de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ définit un isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ de $\bar{E}^k$ sur $T_u, (\bar{H}^k(V_n))$, où $u' = \pi_k^{k+1}(u)$; d'autre part, l'élément u peut être considéré comme un isomorphisme linéaire de la fibre-type $\bar{E}^k$ sur la fibre $(\bar{S}^kT)_x$, où x est la projection de u sur V_n . On déduit un isomorphisme linéaire $\tilde{u} \cdot u^{-1}$ de $(\bar{S}^kT)_x$ sur $T_u, (\bar{H}^k(V_n))$. Soit v un autre élément de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ tel que $\pi_k^{k+1}(v) = x$. Il existe alors un $g \in \bar{L}_n^{k+1}$ de sorte que $v = ug$. L'élément v définit un isomorphisme linéaire $\tilde{v} \cdot v^{-1}$ de $(\bar{S}^kT)_x$ sur $T_v, (\bar{H}^k(V_n))$ avec $v' = \pi_k^{k+1}(v)$. Or, $v = u \cdot \rho(g)$ et $\tilde{v} = TR_{g'} \cdot \tilde{u} \cdot \rho(g)$, où $g' = \pi_k^{k+1}(g) \in \bar{L}_n^k$. Par conséquent $\tilde{v} \cdot v^{-1} = TR_{g'} \cdot \tilde{u} \cdot u^{-1}$. La projection de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ sur $\bar{H}^k(V_n)$ étant surjective, on obtient ainsi un isomorphisme de $\bar{S}^kT$ sur $T(\bar{H}^k(V_n))/\bar{L}_n^k$. De même, on définit un isomorphisme de S^kT sur $T(H^k(V_n))/L_n^k$.

REMARQUE

P. Libermann a montré qu'il existe un isomorphisme

canonique de $T(\bar{H}^k(V_n))/\bar{L}_n^k$ (resp. $T(H^k(V_n))/L_n^k$) sur $\bar{J}^k_T$ (resp. J^k_T), prolongement semi-holonome (resp. holonome) d'ordre k de l'espace fibré vectoriel $T(V_n)$. On déduit donc un isomorphisme de $\bar{S}^k_T$ (resp. S^k_T) sur $\bar{J}^k_T$ (resp. J^k_T).

La projection de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ sur $\bar{H}^{m+1}(V_n)$ est compatible avec la projection $\bar{L}_n^{k+1} \longrightarrow \bar{L}_n^{m+1}$ et la projection $\bar{H}^k(R^n) \longrightarrow \bar{H}^m(R^n)$ induit une application linéaire de $\bar{E}^k$ sur $\bar{E}^m$ compatible avec la projection $\bar{L}_n^{k+1} \longrightarrow \bar{L}_n^{m+1}$. La projection π_{m+1}^{k+1} de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ sur $\bar{H}^{m+1}(V_n)$ induit donc une surjection p_m^k de $\bar{S}^k_T$ sur $\bar{S}^m_T$, de sorte que la restriction de p_m^k à chaque fibre de $\bar{S}^k_T$ soit linéaire et que l'application induite sur la base V_n soit l'application identique. De même, il y a une projection naturelle de S^k_T sur S^m_T pour $m < k$.

$H^{k+1}(V_n)$ étant un sous-espace fibré principal de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ et la représentation linéaire de L_n^{k+1} sur E^k étant la restriction de celle de $\bar{L}_n^{k+1}$ sur $\bar{E}^k$, il existe donc une injection canonique de S^k_T dans $\bar{S}^k_T$ de sorte que S^k_T s'identifie à un sous-espace fibré vectoriel de $\bar{S}^k_T$.

Considérons la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bar{N}_{k-1}^k \longrightarrow \bar{S}^k_T \longrightarrow \bar{S}^{k-1}_T \longrightarrow 0 \\ (\text{ resp. } 0 \longrightarrow N_{k-1}^k \longrightarrow S^k_T \longrightarrow S^{k-1}_T \longrightarrow 0), \end{aligned}$$

où $\bar{N}_{k-1}^k$ (resp. N_{k-1}^k) est le noyau de la projection $\bar{S}^k_T \longrightarrow \bar{S}^{k-1}_T$ (resp. $S^k_T \longrightarrow S^{k-1}_T$). Soit donné un scindage de la suite exacte défini par un relèvement de $\bar{S}^{k-1}_T$ dans $\bar{S}^k_T$ (resp. de S^{k-1}_T dans S^k_T). Un tel relèvement détermine une injection de $T(\bar{H}^{k-1}(V_n))/\bar{L}_n^{k-1}$ (resp. $T(H^{k-1}(V_n))/L_n^{k-1}$) dans $T(\bar{H}^k(V_n))/\bar{L}_n^k$ (resp. $T(H^k(V_n))/L_n^k$). On obtient ainsi une connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $\bar{H}^k(V_n) \longrightarrow \bar{H}^{k-1}(V_n)$ (resp. $H^k(V_n) \longrightarrow H^{k-1}(V_n)$) dont le champ d'éléments de contact est invariant par rapport aux translations de $\bar{L}_n^k$ (resp. L_n^k) sur $\bar{H}^k(V_n)$ (resp. $H^k(V_n)$). Réciproquement, une telle connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $\bar{H}^k(V_n) \longrightarrow \bar{H}^{k-1}(V_n)$ (resp. $H^k(V_n) \longrightarrow H^{k-1}(V_n)$) définit une injection de $T(\bar{H}^{k-1}(V_n))/\bar{L}_n^{k-1}$ (resp. $T(H^{k-1}(V_n))/L_n^{k-1}$) dans $T(\bar{H}^k(V_n))/\bar{L}_n^k$ (resp. $T(H^k(V_n))/L_n^k$), d'où un scindage de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \bar{N}_{k-1}^k \longrightarrow \bar{S}^k_T \longrightarrow \bar{S}^{k-1}_T \longrightarrow 0 \\ (\text{ resp. } 0 &\longrightarrow N_{k-1}^k \longrightarrow S^k_T \longrightarrow S^{k-1}_T \longrightarrow 0). \end{aligned}$$

On énoncera

PROPOSITION II.15 [16c]

Tout scindage de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}_{k-1}^k \longrightarrow \bar{S}^k_T \longrightarrow \bar{S}^{k-1}_T \longrightarrow 0$$

(resp. $0 \longrightarrow N_{k-1}^k \longrightarrow S^k T \longrightarrow S^{k-1} T \longrightarrow 0$)
induit une connexion infinitésimale dans l'espace fibré
principal $\bar{H}^k(V_n) \longrightarrow \bar{H}^{k-1}(V_n)$ (resp. $H^k(V_n) \longrightarrow H^{k-1}(V_n)$)
dont le champ d'éléments de contact horizontaux est invariant
par rapport aux translations de $\bar{L}_n^k$ (resp. L_n^k) sur
 $\bar{H}^k(V_n)$ (resp. $H^k(V_n)$). Inversement, une telle connexion
infinitésimale détermine un scindage de la suite exacte
donnée.

5. Connexions linéaires et $\mathcal{E}$ -connexions.

Toute $\mathcal{E}$ -connexion $\mathcal{P}_{k+1}$ d'ordre k détermine un re-
 lèvement de $S^0 T = T(V_n)$ dans $\bar{S}^k T$, c'est-à-dire un scindage
 de la suite d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}^k \longrightarrow \bar{S}^k T \longrightarrow T(V_n) \longrightarrow 0,$$

où $\bar{N}^k$ est le noyau de la projection de $\bar{S}^k T$ sur $T(V_n)$.

Plus précisément, nous avons le résultat suivant:

THEOREME II.16

Il existe une bijection entre les ensembles des
 $\mathcal{E}$ -connexions d'ordre k sur V_n et des scindages de la
suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}^k \longrightarrow \bar{S}^k T \longrightarrow T(V_n) \longrightarrow 0.$$

Démontrons d'abord deux lemmes:

LEMME II.17

Soit $\bar{E}^k = R^n \oplus \bar{\mathcal{L}}_n^k$ la décomposition associée à la connexion canonique dans $\bar{H}^k(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^k$. Pour toute autre décomposition de la forme $\bar{E}^k = Q^k \oplus \bar{\mathcal{L}}_n^k$, il existe un élément et un seul $g \in \bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow L_n^1)$ tel que $\rho(g)(R^n) = Q^k$.

Le lemme se démontre par récurrence sur k . Pour $k = 1$, nous avons la décomposition canonique $E^1 = R^n \oplus \mathcal{L}_n^1$. Soit $E^1 = Q^1 \oplus \mathcal{L}_n^1$ une autre décomposition de E^1 . Considérons une section locale σ_1 de $H^1(R^n) \rightarrow R^n$ telle que $\sigma_1(0) = e_1$ et $T\sigma_1(R^n) = Q^1$. L'isomorphisme local f de $H^1(R^n)$ dans $H^1(R^n)$ défini par les conditions

(i) $f \cdot \gamma_1 = \sigma_1$, où γ_1 est la section "nulle" de $H^1(R^n) \rightarrow R^n$,

(ii) f est compatible avec les translations à droite de L_n^1 sur $H^1(R^n)$

est évidemment admissible. Le 1-jet $j_{e_1}^1 f = g$ définit un élément de $\bar{M}_n^1 = \text{Ker}(\bar{L}_n^2 \rightarrow L_n^1)$ satisfaisant à la condition: $\rho(g)(R^n) = Q^1$. L'unicité se déduit du fait que l'élément neutre est le seul élément de $\bar{M}_n^1$ qui laisse stable les composantes de $E^1 = R^n \oplus \mathcal{L}_n^1$.

Supposons que le lemme est démontré pour tout entier $m \leq k-1$. Soit $\bar{E}^k = Q^k \oplus \bar{\mathcal{L}}_n^k$ une décomposition de $\bar{E}^k$. Considérons une section locale σ_k de $\bar{H}^k(R^n) \rightarrow R^n$

telle que $\sigma_k(0) = e_k$ et $T\sigma_k(T_0(R^n)) = Q^k$. Par la projection π_{k-1}^k de $\bar{H}^k(R^n)$ sur $\bar{H}^{k-1}(R^n)$, nous obtenons une décomposition $\bar{E}^{k-1} = T\pi_{k-1}^k(Q^k) \oplus \bar{E}_n^{k-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un $g' \in \bar{M}_n^k = \text{Ker}(\bar{L}_n^k \rightarrow L_n^1)$ tel que $\rho(g')(R^n) = T\pi_{k-1}^k(Q^k)$. Soit h l'isomorphisme local de $\bar{H}^k(R^n)$ dans $\bar{H}^k(R^n)$ défini par les conditions:

(i) $h \cdot \eta_k = R_{g'} \cdot \sigma_k$, où η_k est la section nulle de $\bar{H}^k(R^n) \rightarrow R^n$;

(ii) h est compatible avec les translations à droite de $\bar{L}_n^k$ sur $\bar{H}^k(R^n)$.

Le 1-jet $j_e^1 h = g$ appartient à $\bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow L_n^1)$ et $\rho(g)(R^n) = Q^k$. Supposons qu'il existe un autre

$\bar{g} \in \bar{M}_n^{k+1}$ tel que $\rho(\bar{g})(R^n) = Q^k$. On déduit

$\rho(\pi_{k+1}^{k+1}(\bar{g}))(R^n) = T\pi_{k+1}^{k+1}(Q^k)$; par conséquent, $g' = \pi_{k+1}^{k+1}(\bar{g})$.

Il existe donc un $m \in \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow \bar{L}_n^k)$ tel que $\bar{g} = g'm$.

A l'exception de l'élément neutre de $\bar{L}_n^{k+1}$, aucun élément de $\text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow \bar{L}_n^k)$ ne laisse stable les composantes de $\bar{E}^k = R^n \oplus \bar{E}_n^k$, d'où $\bar{g} = g'$.

LEMME II.

Le sous-groupe de Lie $C^{k+1}(L_n^1)$ est le plus grand sous-groupe de $\bar{L}_n^{k+1}$ qui laisse stable les deux composantes de $\bar{E}^k = R^n \oplus \bar{E}_n^k$.

On sait que $\mathcal{L}^{k+1}(\mathbb{L}_n^1)$ laisse stable les deux composantes de $\bar{E}^k = \mathbb{R}^n \oplus \bar{E}_n^k$. Soit $g \in \bar{L}_n^{k+1}$ tel que $\rho(g)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Posons $g_0 = \pi_1^{k+1}(g)$. L'opération de l'élément $\mathcal{L}^{k+1}(g_0) \cdot g^{-1}$ est triviale sur la composante $\mathbb{R}^n$ de $\bar{E}^k$, ce qui implique que $\mathcal{L}^{k+1}(g_0) \cdot g^{-1}$ appartient à $\text{Ker}(\mathbb{L}_n^{k+1} \rightarrow \mathbb{L}_n^1)$. D'après le lemme précédent, nous avons $g = \mathcal{L}^{k+1}(g_0) \in \mathcal{L}^{k+1}(\mathbb{L}_n^1)$.

Revenons à la démonstration du théorème. L'étude précédente montre qu'il existe une application de l'ensemble des $\mathcal{E}$ -connexions d'ordre k sur V_n dans l'ensemble des scindages de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}^k \longrightarrow \bar{S}^k T \longrightarrow T(V_n) \longrightarrow 0.$$

Montrons que cette application est injective. Soient

φ_{k+1} et ψ_{k+1} deux $\mathcal{E}$ -connexions induisant le même relèvement de $T(V_n)$ dans $\bar{S}^k T$. Nous désignerons par $\tilde{\varphi}_{k+1}$ (resp. $\tilde{\psi}_{k+1}$) le relèvement de $T(V_n)$ dans $\bar{S}^k T$ induit par φ_{k+1} (resp. ψ_{k+1}). Soit $y \in T(V_n)$. Il existe un $u \in H^1(V_n)$ et un $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que $y = q_1(u, \xi)$, où q_1 est la projection de $H^1(V_n) \times \mathbb{R}^n$ sur $T(V_n)$. La condition $\tilde{\varphi}_{k+1}(y) = \tilde{\psi}_{k+1}(y)$ entraîne que $q_{k+1}(\varphi_{k+1}(u), \xi) = q_{k+1}(\psi_{k+1}(u), \xi)$, où q_{k+1} est la projection naturelle de $\bar{H}^{k+1}(V_n) \times \bar{E}^k$

sur $\bar{S}^k T$. En vertu du lemme II.18, on déduit que $\varphi_{k+1}(u) =$

$\psi_{k+1}(u)$ pour tout $u \in H^1(V_n)$. Montrons maintenant que l'application en question est surjective. Soit donné un scindage de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}^k \longrightarrow \bar{S}^k T \longrightarrow T(V_n) \longrightarrow 0$$

défini par un relèvement σ de $T(V_n)$ dans $\bar{S}^k T$. Soit x un élément quelconque de V_n . Un élément $u \in \bar{H}^{k+1}(V_n)$ situé dans la fibre au-dessus de x détermine un isomorphisme linéaire de $\bar{E}^k$ sur $(\bar{S}^k T)_x$. L'image de $\sigma(T_x(V_n))$ par u^{-1} est un sous-espace vectoriel de $\bar{E}^k$ complémentaire à $\bar{\mathcal{E}}_n^k$, c'est-à-dire $\bar{E}^k = u^{-1}\{\sigma(T_x(V_n))\} \oplus \bar{\mathcal{E}}_n^k$. D'après le lemme II.17, il existe un $g \in \bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow L_n^1)$ tel que $\rho(g)(R^n) = u^{-1}\{\sigma(T_x(V_n))\}$. L'élément $v = ug$ de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ définit donc un isomorphisme linéaire de $\bar{E}^k = R^n \oplus \bar{\mathcal{E}}_n^k$ sur $(\bar{S}^k T)_x$ de sorte que R^n est appliqué sur le sous-espace vectoriel $\sigma(T_x(V_n))$ de $(\bar{S}^k T)_x$. Tout autre élément de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ dont la projection sur V_n est x et qui possède la même propriété est de la forme vg_0 avec $g_0 \in L^{k+1}(L_n^1)$. Si l'on fait varier x dans V_n , l'ensemble de ces éléments forme un sous-espace fibré principal de groupe structural $L^{k+1}(L_n^1)$ de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$. La restriction de $\pi_1^{k+1} : \bar{H}^{k+1}(V_n) \rightarrow H^1(V_n)$ à ce sous-espace fibré principal donne un isomorphisme sur $H^1(V_n)$ et l'inverse de cet isomorphisme donne la ξ -connexion cherchée.

L'espace fibré vectoriel $T(H^k(V_n))/L_n^k$ est canoniquement isomorphe à $\bar{S}^k T$. Il y a donc une bijection entre les connexions linéaires d'ordre k sur V_n et les scindages de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{N}^k \longrightarrow \bar{S}^k T \longrightarrow T(V_n) \longrightarrow 0.$$

En vertu du résultat précédent, nous avons

THEOREME II.19

Il y a une bijection entre les ensembles des connexions linéaires d'ordre k et des ξ -connexions du même ordre.

Il est à signaler que la bijection établie dans le théorème précédent est précisément celle que nous avons déjà rencontrée dans le paragraphe sur les ξ -connexions. Dans le cas où $k = 1$, il y a une bijection entre les ensembles des connexions linéaires symétriques du premier ordre et les sections covariantes de $H^2(V_n) \rightarrow H^1(V_n)$ en vertu de la Proposition II.12. Supposons qu'il existe une bijection entre les ensembles des ξ -connexions symétriques et des connexions linéaires quasi-holonomes sans torsion pour tout ordre inférieur à k . Montrons que le résultat est toujours vrai pour l'ordre égal à k . En vertu du théorème I.12, à toute ξ -connexion symétrique d'ordre k est associée une connexion linéaire quasi-holonome sans torsion. Réciproquement, soit ω_k une connexion

linéaire quasi-holonome qui est sans torsion. Soit φ_{k+1} la ξ -connexion correspondante dans la relation établie dans le théorème précédent. La connexion projection ω_{k-1} d'ordre $k-1$ de ω_k est une connexion quasi-holonome sans torsion. D'après l'hypothèse de récurrence, il lui correspond une ξ -connexion symétrique φ_k d'ordre $k-1$ qui n'est autre que la projection de φ_{k+1} , c'est-à-dire $\varphi_k = \pi_k^{k+1} \cdot \varphi_{k+1}$. Le relèvement φ_{k+1} est à valeurs dans $H^{k+1}(V_n)$ en vertu du théorème I.10. On énoncera

COROLLAIRE II.20

Il existe une correspondance biunivoque entre les ensembles des connexions linéaires quasi-holonomes sans torsion et des ξ -connexions symétriques.

6. Pseudo-connexions et multi-connexions.

On appellera pseudo-connexion d'ordre k sur V_n un couple d'applications (ψ_{k+1}, Ψ_{k+1}) , où Ψ_{k+1} est un homomorphisme de $\bar{L}_n^k$ dans $\bar{L}_n^{k+1}$ et où ψ_{k+1} est un relèvement différentiable de $\bar{H}^k(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ compatible avec l'homomorphisme Ψ_{k+1} , c'est-à-dire $\psi_{k+1}(ug) = \psi_{k+1}(u) \Psi_{k+1}(g)$ pour tout $u \in \bar{H}^k(V_n)$ et tout $g \in \bar{L}_n^k$. Il en résulte que Ψ_{k+1} est un relèvement de $\bar{L}_n^k$ dans $\bar{L}_n^{k+1}$ compatible avec les structures de groupes. La condition

de compatibilité de Ψ_{k+1} avec $\bar{\Psi}_{k+1}$ entraîne qu'un champ de vecteurs invariant sur $\bar{H}^k(V_n)$ par rapport aux translations de $\bar{L}_n^k$ est relevé en un champ local sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ invariant sous l'action de $\bar{\Psi}_{k+1}(\bar{L}_n^k)$ sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$. Ce champ local s'étend d'une façon unique en un champ global sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ invariant vis-à-vis des translations à droite de $\bar{L}_n^{k+1}$ sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$. En tenant compte des propositions II.14 et II.15, on obtient un scindage de la suite exacte d'espaces fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \bar{H}_k^{k+1} \longrightarrow \bar{H}^{k+1}_T \longrightarrow \bar{E}^k_T \longrightarrow 0,$$

ou une connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $\bar{H}^{k+1}(V_n) \longrightarrow \bar{H}^k(V_n)$, dont le champ d'éléments de contact est invariant par rapport aux translations à droite de $\bar{L}_n^{k+1}$ sur $\bar{H}^{k+1}(V_n)$.

Considérons une pseudo-connexion $(\Psi_{k+1}, \bar{\Psi}_{k+1})$ d'ordre k sur V_n . Le relèvement Ψ_{k+1} de $\bar{H}^k(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ définit un parallélisme absolu sur $\bar{H}^k(V_n)$. Soit $Z \in T_u(\bar{H}^k(V_n))$; nous posons $\alpha(Z) = \widetilde{\Psi_{k+1}(u)}^{-1}(Z)$, où $\widetilde{\Psi_{k+1}(u)}$ est l'isomorphisme linéaire de $\bar{E}^k$ sur $T_u(\bar{H}^k(V_n))$ associé au repère $\Psi_{k+1}(u)$. L'application $Z \longrightarrow \alpha(Z)$ définit une 1-forme différentielle α sur $\bar{H}^k(V_n)$ à valeurs dans $\bar{E}^k$. Rappelons que $\bar{L}_n^{k+1}$ opère linéairement sur $\bar{E}^k$ par la représentation ρ ; au moyen du relèvement $\bar{\Psi}_{k+1}$ de $\bar{L}_n^k$ dans $\bar{L}_n^{k+1}$, le groupe de Lie $\bar{L}_n^k$ opère linéairement sur

$\bar{E}^k$ par la représentation induite $\sigma = \rho \cdot \Psi_{k+1}$. Pour tout vecteur Z tangent à $\bar{H}^k(V_n)$, nous avons $\alpha(\text{TR}_g(Z)) = \sigma(g^{-1})\alpha(Z)$, c'est-à-dire α est une 1-forme pseudo-tensorielle sur $\bar{H}^k(V_n)$, appelée forme de pseudo-connexion de (ψ_{k+1}, Ψ_{k+1}) .

On appellera multi-connexion d'ordre k sur V_n une suite de pseudo-connexions (ψ_{m+1}, Ψ_{m+1}) d'ordre m , où $m = 1, 2, \dots, k$, telle que pour tout m on a $\Psi_{m+1} \circ \mathcal{L}^m = \mathcal{L}^{m+1}$. Rappelons que $\mathcal{L}^m$ est l'homomorphisme canonique de L_n^1 dans $\bar{L}_n^m$. Le composé $\varphi_{k+1} = \psi_{k+1} \cdot \psi_k \cdot \dots \cdot \psi_2$ est un relèvement de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ compatible avec l'injection canonique de L_n^1 dans $\bar{L}_n^{k+1}$; il détermine donc une Σ -connexion d'ordre k sur V_n . Réciproquement, étant donnée une suite d'homomorphismes $\Psi_{m+1}: \bar{L}_n^m \rightarrow \bar{L}_n^{m+1}$ tels que $\pi_m^{m+1} \cdot \Psi_{m+1} = \text{identité}$ et que $\Psi_{m+1} \circ \mathcal{L}^m = \mathcal{L}^{m+1}$ pour tout $m = 1, 2, \dots, k$, une Σ -connexion $\varphi_{k+1}: H^1(V_n) \rightarrow \bar{H}^{k+1}(V_n)$ détermine une multi-connexion d'ordre k sur V_n .

Nous allons maintenant définir une suite canonique d'homomorphismes de groupes

$$L_n^1 \xrightarrow{\Lambda_1} L_n^2 \xrightarrow{\Lambda_2} L_n^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow L_n^k \xrightarrow{\Lambda_{k+1}} L_n^{k+1} \longrightarrow$$

vérifiant les conditions: $\pi_k^{k+1} \cdot \Lambda_{k+1} = \text{identité}$, $\Lambda_{k+1} \circ \mathcal{L}^k = \mathcal{L}^{k+1}$ pour $k = 2, 3, \dots$. Nous posons $\Lambda_1 = \mathcal{L}^1$, injection canonique de L_n^1 dans $\bar{L}_n^2$. Elle induit un relèvement de $H^1(R^n) = R^n \times L_n^1$ dans $\bar{H}^2(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^2$ que nous notons toujours Λ_2 . Soit

$u = j_{e_1}^1 f \in \bar{L}_n^2$, où f est un isomorphisme local admissible de $H^1(R^n)$ dans $H^1(R^n)$. Considérons l'isomorphisme local h de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\bar{H}^2(R^n)$ défini par la condition : $h \cdot \gamma_2 = R_u \cdot \Lambda_2 \cdot R_{u'}^{-1} f \cdot \gamma_1$, où γ_i ($i = 1, 2$) est la section nulle de $\bar{H}^i(R^n)$ et où $u' = \pi_1^2(u)$. Le jet $j_{e_2}^1 h$ est un élément de $\bar{L}_n^3$ qui ne dépend pas de f ; il dépend uniquement du jet du premier ordre de f . L'application $u \longrightarrow \Lambda_3(u) = j_{e_2}^1 h$ définit un homomorphisme de groupes de $\bar{L}_n^2$ dans $\bar{L}_n^3$ satisfaisant aux conditions : $\Lambda_3 \cdot \iota^2 = \iota^3$ et $\pi_3^2 \cdot \Lambda_3 = \text{identité}$.

Supposons démontrée l'existence d'un homomorphisme Λ_k de $\bar{L}_n^{k-1}$ dans $\bar{L}_n^k$ tel que $\pi_{k-1}^k \cdot \Lambda_k = \text{identité}$ et $\Lambda_k \cdot \iota^{k-1} = \iota^k$. Nous allons définir un homomorphisme Λ_{k+1} de $\bar{L}_n^k$ dans $\bar{L}_n^{k+1}$. Soit donc $v = j_{e_{k-1}}^1 b \in \bar{L}_n^k$, où b est un isomorphisme local admissible de $\bar{H}^{k-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{k-1}(R^n)$. Considérons l'isomorphisme local g de $\bar{H}^k(R^n)$ dans $\bar{H}^k(R^n)$ défini par la condition : $g \cdot \gamma_k = R_v \cdot \Lambda_k \cdot R_{v'}^{-1} \cdot b \cdot \gamma_{k-1}$, où γ_k est la section nulle de $\bar{H}^k(R^n)$ et où $v' = \pi_{k-1}^k(v)$. L'isomorphisme local h est admissible et le jet $j_{e_k}^1 g$ définit un élément de $\bar{L}_n^{k+1}$. On vérifie facilement que l'application $v \longrightarrow \Lambda_{k+1}(v) = j_{e_k}^1 g$ définit un homomorphisme de groupes de $\bar{L}_n^k$ dans $\bar{L}_n^{k+1}$ et qu'elle possède les propriétés voulues. On obtient ainsi une suite canonique d'homomorphismes de groupes :

$$\bar{L}_n^1 \xrightarrow{\Lambda_2} \bar{L}_n^2 \xrightarrow{\Lambda_3} \bar{L}_n^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{L}_n^k \xrightarrow{\Lambda_{k+1}} \bar{L}_n^{k+1} \longrightarrow \dots$$

PROPOSITION II.21

Il existe une bijection entre les ensembles des
 ξ -connexions d'ordre k sur V_n et des multi-connexions
de la forme $\{(\lambda_m, \Lambda_m)\}_{2 \leq m \leq k}$, où Λ_m est l'homo-
morphisme canonique de $\bar{L}_n^{m-1}$ dans $\bar{L}_n^m$.

7. Prolongements d'une connexion.

Considérons une connexion linéaire du premier ordre sur V_n . Nous avons vu qu'il y a une bijection entre les ensembles des connexions linéaires du premier ordre et des sections invariantes de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$. Soit φ_2 la section invariante correspondante. Nous allons construire un relèvement de $\varphi_2(H^1(V_n))$ dans $\bar{H}^3(V_n)$. Soit $u = j_{e_1}^1 f \in \varphi_2(H^1(V_n))$, où f est un isomorphisme local admissible de $H^1(R^n)$ dans $H^1(V_n)$. Soit h l'isomorphisme local de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$ défini par la condition: $h \circ \gamma_2 = \varphi_2 \circ f \circ \gamma_1$. L'isomorphisme h ainsi défini est admissible et détermine un élément $\varphi_2^3(u) = j_{e_2}^1 h$ de $\bar{H}^3(V_n)$. De plus, l'application $u \longrightarrow \varphi_2^3(u)$ définit un relèvement de $\varphi_2(H^1(V_n))$ dans $\bar{H}^3(V_n)$. Le composé $\varphi_3 = \varphi_2^3 \circ \varphi_2$ est un relèvement de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^3(V_n)$ compatible avec l'injection

canonique de L_n^1 dans L_n^3 . Nous obtenons ainsi une ξ -connexion d'ordre 2 sur V_n dont la projection du premier ordre est précisément la ξ -connexion φ_2 donnée. La ξ -connexion φ_3 ou la connexion linéaire d'ordre 2 correspondante s'appellera premier prolongement de la connexion linéaire donnée. Le sous-espace fibré principal $\varphi_3(H^1(V_n))$ de $\bar{H}^3(V_n)$ possède la propriété suivante: pour tout élément v de $\varphi_3(H^1(V_n))$, il existe toujours un isomorphisme local admissible g de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\bar{H}^2(V_n)$ tel que $v = j_{e_2}^1 g$ et que g applique la section nulle (locale) de $\bar{H}^2(R^n)$ dans $\varphi_2(H^1(V_n))$. A l'aide de cette propriété, les raisonnements précédents montrent qu'il existe d'une façon naturelle un relèvement φ_3^4 de $\varphi_3(H^1(V_n))$ dans $\bar{H}^4(V_n)$ et que le composé $\varphi_4 = \varphi_3^4 \cdot \varphi_3$ définit une ξ -connexion d'ordre 3 sur V_n . La ξ -connexion φ_4 ou la connexion linéaire d'ordre 3 correspondante s'appellera deuxième prolongement de la connexion linéaire donnée, car les projections de φ_4 sont respectivement φ_3 et φ_2 . Par itération, nous définissons le k -ième prolongement de la connexion linéaire donnée.

Il est à signaler que toute ξ -connexion d'ordre k sur V_n ne s'obtient pas par prolongements successifs d'une connexion linéaire du premier ordre. Lorsqu'une connexion linéaire d'ordre k ou une ξ -connexion d'ordre k s'obtient

par prolongements successifs d'une connexion linéaire du premier ordre, nous dirons qu'elle est simple.

Soit ω_k (resp. ω'_k) une connexion linéaire d'ordre k sur V_n (resp. V'_n). Nous dirons que ω_k est équivalente à ω'_k s'il existe un difféomorphisme f de V_n sur V'_n tel que $f^{(k)*} \omega'_k = \omega_k$, où $f^{(k)}$ est l'isomorphisme de $\bar{H}^k(V_n)$ sur $\bar{H}^k(V'_n)$ induit par f .

Une connexion linéaire ω_k d'ordre k sur V_n sera dite localement plate si elle est localement équivalente à la connexion infinitésimale canonique dans l'espace fibré principal trivial $\bar{H}^k(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^k$.

THEOREME II.22

Une connexion linéaire d'ordre k est localement plate si et seulement si elle est simple, sans torsion et sans courbure.

Il est bien connu qu'une connexion linéaire du premier ordre est localement plate si et seulement si elle est sans torsion et sans courbure. Pour $k > 1$, les conditions sont évidemment nécessaires, car la connexion canonique dans $\bar{H}^k(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^k$ est simple, sans torsion et sans courbure. Montrons que les conditions sont suffisantes. Soit ω_k une connexion linéaire simple d'ordre k sans torsion et sans courbure. La connexion

projection ω_1 d'ordre 1 de ω_k est localement plate puisqu'elle est sans torsion et sans courbure. La connexion ω_k s'obtient donc par prolongements successifs de la connexion ω_1 . Soit φ_{k+1} la section invariante de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ correspondant à la connexion linéaire ω_k . Nous posons $\varphi_k = \pi_{k+1}^* \varphi_{k+1}$. Pour tout $y \in H^1(V_n)$, le n -plan horizontal de $\bar{H}^k(V_n)$ associé au repère $\varphi_{k+1}(y)$ est tangent à $\varphi_k(H^1(V_n))$, car ω_k est simple. Or, $\varphi_k(H^1(V_n)) \subset H^k(V_n)$, la connexion ω_k est donc quasi-holonyme. Par conséquent, φ_{k+1} est à valeurs dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$. D'autre part, la nullité de la courbure de ω_k entraîne que le champ d'éléments de contact sur $\bar{H}^k(V_n)$ défini par ω_k est involutif. Soit $x \in V_n$ et soit $u \in \varphi_k(H^1(V_n))$ tel que $\pi_0^k(u) = x$. Considérons la sous-variété intégrale maximale W du champ involutif passant par u ; elle est de dimension n . De plus, $W \subset \varphi_k(H^1(V_n))$. Soit θ_W (resp. $\hat{\theta}_Q$) la restriction de la forme canonique θ_k (resp. $\hat{\theta}_k$) sur $\bar{H}^k(V_n)$ (resp. sur $\bar{H}^k(R^n)$) à la sous-variété W (resp. $Q = \gamma_k(R^n)$, où γ_k est la section nulle de $\bar{H}^k(R^n)$). Les formes θ_W et $\hat{\theta}_Q$ sont à valeurs dans $R^n \subset \bar{E}^{k-1}$. Considérons maintenant la forme $\beta = p_1^* \theta_W - p_2^* \hat{\theta}_Q$ sur la variété produit $W \times Q$, où p_i ($i = 1, 2$) sont les projections sur W et Q respectivement. En termes d'une base $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ de R^n , les composantes β_i de β

sont linéairement indépendantes. Considérons le module $\mathcal{M}$ des champs de vecteurs X sur $W \times Q$ tels que $\beta_i(X) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Si $X \in \mathcal{M}$ et si $Y \in \mathcal{M}$, nous avons $d\beta(X, Y) = X\beta(Y) - Y\beta(X) - \beta([X, Y]) = -\beta([X, Y])$. D'autre part, $d\beta(X, Y) = 0$. Par conséquent, $[X, Y] \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est involutif. D'après le théorème de Frobenius, il existe une sous-variété intégrale maximale M de dimension n de la variété produit $W \times Q$ passant par $(u, e_k) \in W \times Q$. Pour tout vecteur Z non nul tangent à $p_2^{-1}(e_k)$, $\beta(Z) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de e_k dans Q et une section différentiable λ de U dans $W \times Q$ telle que $\lambda(U) \subset M$. Soit $h = p_1 \circ \lambda$. La forme β est nulle sur M , nous avons donc $\lambda^* \beta = 0$, ce qui entraîne que $\hat{\theta}_Q = h^* \theta_W$. L'application h de U dans W s'étend en un difféomorphisme local $\tilde{h}$ de $\bar{H}^k(\mathbb{R}^n)$ dans $\bar{H}^k(V_n)$ compatible avec les translations à droite de $\bar{L}_n^k$ sur les deux espaces fibrés principaux; d'ailleurs, $\hat{\theta}_k = \tilde{h}^* \theta_k$. D'après le théorème I.2, il existe un difféomorphisme local f d'un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage ouvert de $x \in V_n$, de sorte que $\tilde{h}$ s'écrit localement sous la forme $\tilde{h} \circ f^{(k)}$. Il en résulte que ω_k est localement plate.

CHAPITRE III

TENSEURS DE STRUCTURE

1. *G*-structure régulière.

Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Soit $H_G(R^n) = R^n \times G$ le sous-espace fibré principal canonique de groupe structural G de $H^1(R^n) = R^n \times L_n^1$. Nous désignerons par E_G^1 l'espace tangent à $H_G(R^n)$ au point e_1 , où e_1 est l'élément distingué dans $H^1(R^n)$. Nous avons $E_G^1 = R^n \oplus \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G . Soit $\bar{H}_G^{(1)}(R^n)$ l'ensemble des éléments u de $\bar{H}^2(R^n)$ tels que l'isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ applique E_G^1 sur $T_{u'}(H_G(R^n))$, où $u' = \pi_1^2(u) \in H_G(R^n)$. La fibre de $\bar{H}_G^{(1)}(R^n)$ située au-dessus de l'origine $0 \in R^n$ est un sous-groupe de $\bar{L}_n^2$ qu'on notera par $\bar{G}^{(1)}$. Il est clair que $\bar{H}_G^{(1)}(R^n) = R^n \times \bar{G}^{(1)}$. Le groupe de Lie $\bar{G}^{(1)}$ s'appellera premier prolongement semi-holonome de G .

L'ensemble $\bar{H}_G^{(1)}(R^n)$ est un sous-espace fibré principal de $\bar{H}^2(R^n)$. Nous désignerons par $\bar{E}_G^2 = R^n \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}$ l'espace tangent à $\bar{H}_G^{(1)}(R^n)$ au point e_2 , où e_2 est l'élément distingué dans $\bar{H}^2(R^n)$ et où $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}$ est l'algèbre de Lie de $\bar{G}^{(1)}$. Soit $\bar{H}_G^{(2)}(R^n)$ l'ensemble des éléments v de $\bar{H}^3(R^n)$ tels que l'isomorphisme linéaire associé $\tilde{v}$ envoie $\bar{E}_G^2$ sur $T_v(\bar{H}_G^{(1)}(R^n))$, où $v' = \pi_2^3(v) \in \bar{H}_G^{(1)}(R^n)$. La fibre de $\bar{H}_G^{(2)}(R^n)$ située au-dessus de l'origine $0 \in R^n$

est un sous-groupe de L_n^3 qu'on notera $\bar{G}^{(2)}$. Il est clair que $\bar{H}_G^{(2)}(R^n) = R^n \times \bar{G}^{(2)}$. Le groupe de Lie $\bar{G}^{(2)}$ s'appellera deuxième prolongement semi-holonome de G .

On construit par itération un sous-espace fibré principal $\bar{H}_G^{(k)}(R^n) = R^n \times \bar{G}^{(k)}$ de $\bar{H}^{k+1}(R^n)$, où $\bar{G}^{(k)}$ est un sous-groupe de Lie de $\bar{L}_n^{k+1}$, appelé k-ième prolongement semi-holonome de G . Dans la suite, nous désignerons par $G^{(k)} = \bar{G}^{(k)} \cap L_n^{k+1}$ et par $\bar{E}_G^{k+1} = R^n \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(k)}$ l'espace tangent à $\bar{H}_G^{(k)}(R^n)$ au point e_{k+1} , où $\bar{\mathfrak{g}}^{(k)}$ est l'algèbre de Lie de $\bar{G}^{(k)}$. La projection naturelle π_{m+1}^{k+1} de $\bar{L}_n^{k+1}$ sur $\bar{L}_n^{m+1}$ induit un homomorphisme surjectif de $\bar{G}^{(k)}$ sur $\bar{G}^{(m)}$ qu'on notera toujours par le même symbole π_{m+1}^{k+1} ($m < k$).

Plus généralement, soit G_m un sous-groupe de Lie de $\bar{L}_n^m$. L'espace fibré trivial $H_{G_m}(R^n) = R^n \times G_m$ sur R^n est un sous-espace fibré principal de $\bar{H}^m(R^n) = R^n \times \bar{L}_n^m$. Nous désignerons par $\bar{E}_{G_m} = R^n \oplus \mathfrak{g}_m$ l'espace tangent à $H_{G_m}(R^n)$ au point e_m , où e_m est l'élément distingué dans $\bar{H}^m(R^n)$. On construit par la méthode précédente le premier prolongement $\bar{H}_{G_m}^{(1)}(R^n)$ de $H_{G_m}(R^n)$: un élément u de $\bar{H}^{m+1}(R^n)$ appartient à $\bar{H}_{G_m}^{(1)}(R^n)$ si et seulement si l'isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ associé au repère u applique $\bar{E}_{G_m}$ sur $T_{u'}(H_{G_m}(R^n))$, où $u' = \pi_{m+1}^{m+1}(u) \in H_{G_m}(R^n)$. L'ensemble des éléments de $\bar{H}_{G_m}^{(1)}(R^n)$ qui se projettent sur $0 \in R^n$

défini un sous-groupe de $\bar{L}_n^{m+1}$, appelé premier prolongement semi-holonome de G_m et qui sera noté $\bar{G}_m^{(1)}$. Il y a une application naturelle π_m^{m+1} de $\bar{G}_m^{(1)}$ dans G_m , qui définit d'ailleurs un homomorphisme de groupes, mais cette application n'est pas en général surjective.

PROPOSITION III.1

Soit G_m un sous-groupe de Lie de $\bar{L}_n^m$. Pour que l'homomorphisme π_m^{m+1} de $\bar{G}_m^{(1)}$ dans G_m soit surjectif, il faut et il suffit qu'on ait $G_m \subset \bar{G}_{m-1}^{(1)}$, où G_{m-1} est la projection d'ordre $m-1$ de G_m .

Supposons que l'homomorphisme de $\bar{G}_m^{(1)}$ dans G_m soit surjectif. Pour tout élément u de G_m , il existe au moins un $v \in \bar{G}_m^{(1)}$ tel que $\pi_m^{m+1}(v) = u$. Puisque $v \in \bar{G}_m^{(1)} \subset \bar{H}_{G_m}^{(1)}(R^n)$, il existe un isomorphisme local admissible f de $\bar{H}^m(R^n)$ dans $\bar{H}^m(R^n)$ tel que $v = j_{e_m}^1 f$ et que f induit un difféomorphisme local de $H_{G_m}(R^n)$ dans lui-même. Soit h l'isomorphisme local de $\bar{H}^{m-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{m-1}(R^n)$ défini par la condition : $\pi_{m-1}^m \circ f = h \circ \pi_{m-1}^m$. Il est évident que $u = j_{e_{m-1}}^1 h$ est un élément de $\bar{G}_{m-1}^{(1)}$, d'où l'inclusion $G_m \subset \bar{G}_{m-1}^{(1)}$. Réciproquement, supposons que $G_m \subset \bar{G}_{m-1}^{(1)}$; il existe alors pour tout u de G_m un isomorphisme local admissible h de $\bar{H}^{m-1}(R^n)$ dans $\bar{H}^{m-1}(R^n)$ tel que $u = j_{e_{m-1}}^1 h$ et que h induit un isomorphisme local de $H_{G_{m-1}}(R^n) = R^n \times G_{m-1}$ dans lui-même. Or, la projection de $H_{G_m}(R^n)$

sur $H_{G_{m-1}}(R^n)$ étant une submersion, il existe un isomorphisme local f de $H_{G_m}(R^n)$ dans lui-même tel que $\pi_{m-1}^m \circ f = h \circ \pi_{m-1}^m$. Par conséquent, le 1-jet $j_{e_m}^1 f$ définit un élément de $\bar{H}_{G_m}^{(1)}(R^n)$ dont la projection d'ordre m est précisément l'élément u , d'où la surjectivité de $\bar{G}_m^{(1)}$ sur G_m .

COROLLAIRE III.2

Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Pour tout entier $k \geq 1$, l'homomorphisme naturel de $\bar{G}^{(k)}$ dans $\bar{G}^{(k-1)}$ est surjectif.

Un sous-groupe de Lie G_m de $\bar{L}_n^m$ sera dit régulier s'il possède les propriétés suivantes:

- (i) G_m est contenu dans L_n^m ;
- (ii) Soit G_1 la projection d'ordre 1 de G_m .
L'image de G_1 par l'injection canonique de L_n^1 dans L_n^m est un sous-groupe de G_m ;
- (iii) Soit $G_m^{(1)} = \bar{G}_m^{(1)} \cap L_n^{m+1}$. L'homomorphisme naturel de $G_m^{(1)}$ dans G_m est surjectif.

Soit G_k un sous-groupe de Lie de $\bar{L}_n^k$. Une G_k -structure d'ordre k sur V_n est une réduction du groupe structural $\bar{L}_n^k$ de $\bar{H}^k(V_n)$ à G_k , c'est-à-dire un sous-espace fibré principal différentiable $H_{G_k}(V_n)$ de groupe structural G_k de $\bar{H}^k(V_n)$. Pour une variété différentiable V_n et un

groupe de Lie G_k arbitraire, il peut exister ou ne pas exister une G_k -structure d'ordre k sur V_n .

Dans la suite nous supposons que V_n est paracompacte. Nous désignerons par $H_{G_k}(V_n)$ une G_k -structure d'ordre k sur V_n . Considérons la G_k -structure canonique $H_{G_k}(R^n) = R^n \times G_k$ sur R^n . Nous désignerons par $E_{G_k} = R^n \otimes \mathfrak{g}_k$ l'espace tangent à $H_{G_k}(R^n)$ au point e_k , où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie de G_k . Soit $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ l'ensemble des éléments u de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$ tels que l'isomorphisme linéaire $\tilde{u}$ associé au repère u applique E_{G_k} sur $T_u(H_{G_k}(V_n))$, où $u' = \pi_{k+1}^*(u)$. L'ensemble $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ s'appellera premier prolongement semi-holonome de $H_{G_k}(V_n)$.

Une G_k -structure $H_{G_k}(V_n)$ sur V_n sera dite régulière si elle possède les propriétés:

- (i) G_k est un sous-groupe régulier de $\bar{L}_n^k$;
- (ii) $H_{G_k}(V_n)$ est contenu dans $H^k(V_n)$;
- (iii) Soit $H_{G_{k-1}}(V_n)$ la projection de $H_{G_k}(V_n)$ par π_{k-1}^* . On a $H_{G_k}(V_n) \subset \bar{H}_{G_{k-1}}^{(1)}(V_n)$.

Toute G_1 -structure du premier ordre sera considérée comme une structure régulière.

Soit $H_{G_k}(V_n)$ une G_k -structure régulière sur V_n . Son prolongement semi-holonome $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ n'est pas vide et est muni d'une structure d'espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $\bar{G}_k^{(1)}$. Il y a une projection

naturelle π_k^{k+1} de $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ sur $H_{G_k}(V_n)$. La restriction à $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ de la forme canonique θ_{k+1} sur $H^{k+1}(V_n)$ définit une 1-forme sur $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ à valeurs dans $E_{G_k} = R^n \oplus \mathcal{G}_k$. Pour tout vecteur Z tangent à $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ on a $\theta_{k+1}(TR_g(Z)) = \rho(g^{-1}) \theta_{k+1}(Z)$ où $g \in \bar{G}_k^{(1)}$.

Désormais, nous supposons que $H_{G_k}(V_n)$ est une G_k -structure régulière sur V_n . Nous posons $H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$. L'intersection peut être vide. Si l'intersection $\{\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ n'est pas vide pour les deux fibres situées au-dessus de $x \in V_n$ et si $u \in \{\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$, alors $uG_k^{(1)} = \{\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)\}_x^k \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ où $G_k^{(1)} = \bar{G}_k^{(1)} \cap L_n^{k+1}$. Cette remarque nous amène à poser la définition suivante:

Définition: [16i]

Une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ d'ordre k sur V_n sera dite presque intégrable si son prolongement $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ admet un sous-espace fibré principal $H_{G_k}^{(1)}(V_n)$ de groupe structural $G_k^{(1)} = \bar{G}_k^{(1)} \cap L_n^{k+1}$ contenu dans $H^{k+1}(V_n)$. On a alors

$$H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n).$$

PROPOSITION III.3

Une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable si et seulement si pour tout x de V_n l'intersection $\{\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ n'est pas vide.

Il suffit de montrer que la condition est suffisante.

Montrons que $H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ est un espace fibré principal. Pour cela, il suffit de montrer que $H_{G_k}^{(1)}(V_n)$ admet des sections locales. La fibre $\bar{G}_k^{(1)}/\mathcal{L}^{k+1}(G_1)$ étant difféomorphe à un espace numérique, il existe des relèvements de $H_{G_1}(V_n) = \pi_1^k(H_{G_k}(V_n))$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ compatibles avec l'injection canonique de $G_1 = \pi_1^k(G_k)$ dans $\bar{G}_k^{(1)}$. Soit ψ_{k+1} un tel relèvement. Le relèvement $\psi_k = \pi_k^{k+1} \circ \psi_{k+1}$ définit une $\mathcal{E}$ -connexion symétrique d'ordre $k-1$ sur V_n . Soit φ_{k+1} un relèvement de $H_{G_1}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$ compatible avec l'injection canonique de G_1 dans $G_k^{(1)} \subset \bar{G}_k^{(1)}$ et vérifiant la condition: $\pi_k^{k+1} \circ \varphi_{k+1} = \psi_k$. Un tel relèvement existe [16i]. Posons donc $\varphi_{k+1}(u) = \psi_{k+1}(u) \wedge (u)$ pour tout élément u de $H_{G_1}(V_n)$. L'application $u \rightarrow \wedge(u)$ est une application différentiable sur $H_{G_1}(V_n)$ à valeurs dans $M \cdot N$, où $M = \text{Ker}(L_n^{k+1} \rightarrow L_n^k)$ et où $N = \text{Ker}(\bar{G}_k^{(1)} \rightarrow G_k)$. Les groupes N et M sont des groupes abéliens isomorphes aux espaces vectoriels $\mathfrak{g}_k \otimes (R^n)^*$ et $R^n \otimes \bigcirc^{k+1}(R^n)^*$, où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie de G_k ; en prenant dans l'espace vectoriel engendré par $\mathfrak{g}_k \otimes (R^n)^*$ et $R^n \otimes \bigcirc^{k+1}(R^n)^*$ un supplémentaire W de $\mathfrak{g}_k \otimes (R^n)^*$ contenu dans $R^n \otimes \bigcirc^{k+1}(R^n)^*$, c'est-à-dire un supplémentaire W de $(\mathfrak{g}_k \otimes (R^n)^*) \cap (R^n \otimes \bigcirc^{k+1}(R^n)^*)$ dans $R^n \otimes \bigcirc^{k+1}(R^n)^*$, on obtient une décomposition $\wedge(u) = \mu(u) \vee(u)$, où μ

(resp. ν) est une fonction différentiable sur $H_{G_1}(V_n)$ à valeurs dans N (resp. M). L'application différentiable $\varphi_{k+1} \cdot \nu^{-1} = \psi_{k+1} \cdot \mu$ définit donc un relèvement de $H_{G_1}(V_n)$ dans $H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$. Comme $H_{G_1}(V_n)$ admet des sections locales, l'espace $H_{G_k}^{(1)}(V_n)$ admet des sections locales et, par conséquent, $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ est un sous-espace fibré principal de $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$.

2. Tenseur de structure.

Soit $H_{G_k}(V_n)$ une G_k -structure régulière d'ordre k sur V_n . Si la G_k -structure est presque intégrable, $H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ est un espace fibré principal de groupe structural $G_k^{(1)} = \bar{G}_k^{(1)} \cap L^{k+1}$. Par hypothèse, l'homomorphisme de $G_k^{(1)}$ dans G_k étant surjectif, le problème de la presque intégrabilité de $H_{G_k}(V_n)$ se ramène au problème de l'existence en chaque point u de $H_{G_k}(V_n)$ d'un repère $z \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ tel que $\pi_k^{k+1}(z) = u$. Nous allons définir des tenseurs de structure de $H_{G_k}(V_n)$ qui sont des obstacles à la presque intégrabilité de

$H_{G_k}(V_n)$. Deux directions se présentent naturellement:

- (i) on considère les relèvements de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ et l'on mesure leur "défaut d'holonomie";
- (ii) on considère les relèvements de $H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$ et l'on calcule leur déviation vis-à-vis de la " G_k -adaptation".

(A) La G_k -structure $H_{G_k}(V_n)$ étant régulière, il existe pour chaque u de $H_{G_k}(V_n)$ au moins un élément $z \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ tel que $\pi_{k-1}^*(z) = u$. Le repère z détermine un n -plan horizontal Q_z de $H_{G_k}(V_n)$ au point $z \in H_{G_k}(V_n)$. Le repère z est holonome si et seulement si la 2-forme $d\theta_k$ s'annule sur Q_z . La restriction de $d\theta_k$ à Q_z mesure en quelque sorte le défaut d'holonomie de z . La forme canonique θ_k sur $H_{G_k}(V_n)$ est à valeurs dans $E_{G_{k-1}} = T_{e_{k-1}}(R^n \times G_{k-1}) = R^n \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$, où $\mathfrak{g}_{k-1}$ est l'algèbre de Lie de $G_{k-1} = \pi_{k-1}^*(G_k)$; elle identifie le n -plan horizontal Q_z avec la composante R^n de $E_{G_{k-1}}$. La restriction de $d\theta_k$ à Q_z définit donc une application bilinéaire alternée de $R^n \times R^n$ dans $E_{G_{k-1}}$. Plus explicitement, elle est définie par

$$\begin{aligned} c_z : R^n \times R^n &\longrightarrow E_{G_{k-1}} \\ (\xi, \eta) &\longrightarrow d\theta_k(X, Y) \end{aligned}$$

où $X \in Q_z$ et $Y \in Q_z$ sont tels que $\theta_k(X) = \xi$, $\theta_k(Y) = \eta$. Or, la 2-forme $\tau_{\pi_{k-2}^*} \cdot d\theta_k$ est nulle sur le n -plan Q_z , car $\tau_{\pi_{k-2}^*} \cdot d\theta_k = d(\tau_{\pi_{k-2}^*} \cdot \theta_k) = d(\theta_{k-1} \cdot \tau_{\pi_{k-1}^*}^*) = \pi_{k-1}^*(d\theta_{k-1})$ et $d\theta_{k-1}$ est nulle sur le n -plan horizontal $\tau_{\pi_{k-1}^*}(Q_z)$ associé au repère holonome u . L'application bilinéaire alternée c_z est donc à valeurs dans $\mathcal{N}_{G_{k-1}}$, algèbre de Lie de $N_{G_{k-1}} = \text{Ker}(G_{k-1} \rightarrow G_{k-2})$ où $G_{k-2} = \pi_{k-2}^*(G_k)$, c'est-à-dire $c_z \in \text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}})$.

Soit z' un autre relèvement de $u \in H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$. On obtient une autre application bilinéaire alternée

$$c_{z'} : R^n \times R^n \longrightarrow \mathcal{N}_{G_{k-1}} \\ (\xi, \eta) \longrightarrow d\theta_*(X', Y')$$

où $X' \in Q_z$, et $Y' \in Q_{z'}$, sont tels que $\theta_*(X') = \xi$,

$\theta_*(Y') = \eta$. Puisque $T\pi_{k-1}^*(X') = T\pi_{k-1}^*(X)$, on a $X' - X = \{S_{z',z}(\xi)^*\}_u$ où $S_{z',z}(\xi)^*$ est le champ de vecteurs verticaux fondamental associé à $S_{z',z}(\xi) \in \mathcal{N}_{G_k}$, algèbre de Lie de $N_{G_k} = \text{Ker}(G_k \longrightarrow G_{k-1})$. De même, $Y' - Y = \{S_{z',z}(\eta)^*\}_u$. On a ainsi une application linéaire $S_{z',z}$ de R^n dans $\mathcal{N}_{G_k}$. Réciproquement, étant donné un $z \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ de projection $\pi_k^{k+1}(z) = u$ et un $S \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k})$, il existe un $z' \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ unique de projection $\pi_k^{k+1}(z') = u$ de sorte que $S = S_{z',z}$. La différence

$$\begin{aligned} c_{z'}(\xi, \eta) - c_z(\xi, \eta) &= d\theta_*(X', Y') - d\theta_*(X, Y) \\ &= d\theta_*(X' - X, Y') + d\theta_*(X, Y' - Y) \\ &= -S_{z',z}(\xi) \cdot \theta_*(Y') + S_{z',z}(\eta) \cdot \theta_*(X) \\ &= -S_{z',z}(\xi) \cdot \eta + S_{z',z}(\eta) \cdot \xi. \end{aligned}$$

Soit ∂ l'application linéaire de $\text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k})$ dans $\text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}})$ définie par :

$$\partial(S)(\xi, \eta) = S(\eta) \cdot \xi - S(\xi) \cdot \eta,$$

où $\xi \in R^n$, $\eta \in R^n$, et $S \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k})$. On a alors

la relation

$$c_{z'} - c_z = \partial S_{z', z}.$$

Soit q la projection naturelle de $\text{Hom} (R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}})$ sur l'espace quotient $\text{Hom} (R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}}) / \partial \{ \text{Hom} (R^n, \mathcal{N}_{G_k}) \}$. L'élément $q(c_z) = q(a_{z'}) = c(u)$ est indépendant du choix de z et de z' . L'application $u \longrightarrow c(u)$ définit une fonction c sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\text{Hom} (R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}}) / \partial \{ \text{Hom} (R^n, \mathcal{N}_{G_k}) \}$, appelée fonction de structure (de première espèce) de la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$.

THEOREME III.4

Une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable si et seulement si la fonction de structure (de première espèce) est nulle sur $H_{G_k}(V_n)$.

En effet, si $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable, l'intersection $H_{G_k}^{(1)}(V_n) = \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ est un espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $G_k^{(1)} = \bar{G}_k^{(1)} \cap L_n^{k+1}$. Puisque $G_k^{(1)} \longrightarrow G_k$ est surjective, il en résulte que la projection $H_{G_k}^{(1)}(V_n) \longrightarrow H_{G_k}(V_n)$ est surjective. Pour chaque point u de $H_{G_k}(V_n)$, il existe au moins un $z \in H_{G_k}^{(1)}(V_n)$ tel que $\pi_k^{k+1}(z) = u$. La 2-forme $d\theta_k$ s'annule sur le n -plan $\mathcal{Q}_z$ associé au repère z , car z est un repère holonome. Par conséquent, $c_z = 0$ et la fonction de structure c est nulle au point u .

Ceci est vrai pour tout point u de $H_{G_k}(V_n)$, d'où la nullité de la fonction de structure c sur $H_{G_k}(V_n)$. Réciproquement, si la fonction de structure c est nulle sur $H_{G_k}(V_n)$, on peut trouver, pour tout relèvement z de $u \in H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$, un $S \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k})$ tel que $c_z = \partial S$. Soit z' l'élément unique de $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ tel que $\pi_{\star}^{k+1}(z') = u$ et que $-S = S_{z', z}$. La différence $c_{z'} - c_z = -\partial S_{z', z}$. On déduit $c_{z'} = 0$, ce qui entraîne que z' est un repère holonome. Par conséquent, pour tout $u \in H_{G_k}(V_n)$, il existe un $z' \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ de sorte que $\pi_{\star}^{k+1}(z') = u$. D'après la proposition III.3, on conclut que $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable.

COROLLAIRE III.5

Soit G_k un sous-groupe régulier de $\bar{L}_n^k$ tel que $G_{k-1} = \pi_{\star-1}^k(G_k)$ est isomorphe à $G_{k-2} = \pi_{\star-2}^k(G_k)$. Alors toute G_k -structure régulière d'ordre k sur V_n est presque intégrable.

Le groupe de Lie $G_1 = \pi_1^k(G_k)$, identifié canoniquement au sous-groupe $\mathcal{L}^k(G_1)$ de G_k , opère linéairement sur $E_{G_{k-1}} = R^n \otimes \mathcal{L}_{k-1}$; il laisse invariantes les composantes de $E_{G_{k-1}}$. D'autre part, G_1 opère d'une façon naturelle sur $\text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}}) \simeq \mathcal{N}_{G_{k-1}} \otimes \Lambda^2(R^n)^*$ par la

représentation $\tilde{\rho}$, où $\tilde{\rho}(g) = \text{ad}(g) \otimes \wedge^2 g^{-1}$. Le même groupe G_1 opère sur $\text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k}) \simeq \mathcal{N}_{G_k} \otimes (R^n)^*$ par la représentation $\tilde{\sigma}$ donnée par $\tilde{\sigma}(g) = \text{ad}(g) \otimes g^{-1}$. Pour tout $S \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k})$, on vérifie facilement que $\tilde{\rho}(g) \cdot \partial S = \partial(\tilde{\sigma}(g) \cdot S)$. Par conséquent, les opérations de G_1 sur $\text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}})$ laissent stable le sous-espace vectoriel $\partial(\text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k}))$, d'où une représentation σ de G_1 sur l'espace quotient $\text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{N}_{G_{k-1}}) / \partial(\text{Hom}(R^n, \mathcal{N}_{G_k}))$. On vérifie que

$$(*) \quad c(ug) = \sigma(g^{-1}) c(u)$$

pour tout $u \in H_{G_k}(V_n)$ et $g \in G_1$.

On dira qu'une $\mathcal{E}$ -connexion symétrique φ_k d'ordre $k-1$ sur V_n appartient à la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ si φ_k applique $H_{G_1}(V_n) = \pi_1^k(H_{G_k}(V_n))$ dans la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$. Soit φ_k une telle connexion. L'application composée $c_{\varphi_k} = c \circ \varphi_k$ définit un tenseur sur $H_{G_1}(V_n)$ en vertu de la formule (*); on l'appellera tenseur de structure relativement à φ_k .

PROPOSITION III.6

Soit φ_k une $\mathcal{E}$ -connexion symétrique sur V_n appartenant à la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$. La nullité du tenseur de structure relativement à φ_k est une condition nécessaire et suffisante pour que $H_{G_k}(V_n)$ soit presque intégrable.

En vertu du théorème III.4 , il est évident que la condition est nécessaire. Réciproquement, la nullité du tenseur de structure relativement à φ_k entraîne l'existence en chaque $u \in \varphi_k(H_{G_1}(V_n)) \subset H_{G_k}(V_n)$, d'un repère z appartenant à l'intersection $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ et tel que $\pi_k^{k+1}(z) = u$. La projection $\varphi_k(H_{G_1}(V_n)) \rightarrow V_n$ étant surjective, l'intersection $\{\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ n'est pas vide quel que soit x de V_n . D'après la proposition III.3 , la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable.

REMARQUE:

La nullité du tenseur de structure relativement à une ξ -connexion symétrique appartenant à une G_k -structure régulière est une propriété qui ne dépend que de la G_k -structure régulière; elle est indépendante du choix de la ξ -connexion symétrique.

(B) Soit toujours $H_{G_k}(V_n)$ une G_k -structure régulière. Un élément z de $H^{k+1}(V_n)$ de projection $u = \pi_k^{k+1}(z) \in H_{G_k}(V_n)$ détermine un isomorphisme linéaire $\tilde{z}$ de $E^k = R^n \oplus \mathcal{L}_n^k$ sur $T_u(H^k(V_n))$. L'élément z appartient à $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ si et seulement si $\tilde{z}$ envoie la composante R^n de E^k dans $T_u(H_{G_k}(V_n))$. Ceci étant, soit donnée une décomposition

de $T_u(H^k(V_n)) = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$, où $\mathcal{H}_u$ est un sous-espace de vecteurs non-verticaux tangents à $H_{G_k}(V_n)$ et où $\mathcal{V}_u$ est le sous-espace des vecteurs verticaux de $T_u(H^k(V_n))$. Une telle décomposition existe: on peut prendre, par exemple, la décomposition définie par une connexion infinitésimale dans $H^k(V_n)$ obtenue par extension d'une connexion infinitésimale dans le sous-espace fibré principal $H_{G_k}(V_n)$. Tout vecteur $X \in T_u(H^k(V_n))$ s'écrit alors $X = hX + vX$ avec $hX \in \mathcal{H}_u$ et $vX \in \mathcal{V}_u$. Considérons l'application linéaire b_z de R^n , identifié à la composante R^n de $E^k = R^n \oplus \mathcal{E}_n^k$, dans $\mathcal{E}_n^k/\mathcal{G}_k$ définie par

$$b_z(\xi) = q \{ \tilde{z}^{-1}(v(\tilde{z}(\xi))) \},$$

où $\xi \in R^n$ et où q est la projection naturelle de $\mathcal{E}_n^k$ sur $\mathcal{E}_n^k/\mathcal{G}_k$. L'application b_z ne dépend pas du choix de la décomposition $T_u(H^k(V_n)) = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$. En effet, si $T_u(H^k(V_n)) = \tilde{\mathcal{H}}_u \oplus \mathcal{V}_u$ et si $X = \tilde{h}X + \tilde{v}X$ avec $\tilde{h}X \in \tilde{\mathcal{H}}_u$ et $vX \in \mathcal{V}_u$, la différence $vX - \tilde{v}X = \tilde{h}X - hX$ est un vecteur vertical tangent à $H_{G_k}(V_n)$. Par conséquent,

$$q \{ \tilde{z}^{-1}(v(\tilde{z}(\xi))) \} = q \{ \tilde{z}^{-1}(\tilde{v}(\tilde{z}(\xi))) \}.$$

Soit z' un autre élément de $H^{k+1}(V_n)$ tel que $\pi_{*}^{k+1}(z') = u \in H_{G_k}(V_n)$. On a une autre application linéaire $b_{z'}$ de R^n dans $\mathcal{E}_n^k/\mathcal{G}_k$ donnée par

$$b_{z'}(\xi) = q \{ \tilde{z}'^{-1}(v(\tilde{z}'(\xi))) \}.$$

Puisque $\pi_{*}^{k+1}(z) = \pi_{*}^{k+1}(z')$, on a $z' = z \cdot g$ avec $g \in M_n^{k+1} =$

$\text{Ker}(L_n^{k+1} \rightarrow L_n^k)$ et $\tilde{z}' = \tilde{z} \cdot \rho(g)$, où ρ est la représentation linéaire de L_n^{k+1} sur E^k . Si $g \in M_n^{k+1}$ et $\xi \in R^n$, on peut écrire $\rho(g) \cdot \xi = \xi + \xi'$ avec $\xi' \in E_n^k$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} b_{z'}(\xi) &= q \cdot \tilde{z}'^{-1}(v(\tilde{z}'(\xi))) \\ &= q \cdot \tilde{z}^{-1}(v(\tilde{z} \cdot \rho(g)(\xi))) \\ &= q \cdot \tilde{z}^{-1}\{v(\tilde{z}(\xi)) + \tilde{z}(\xi')\} \\ &= b_z(\xi) + q(\xi') \end{aligned}$$

ou encore

$$b_{z'}(\xi) - b_z(\xi) = q \{ \rho(g) \cdot \xi - \xi \} \text{ si } z' = z \cdot g.$$

Soit δ l'application de M_n^{k+1} dans $\text{Hom}(R^n, E_n^k / \mathcal{L}_k)$ définie par: $\delta(g) \cdot \xi = q \{ \rho(g) \cdot \xi - \xi \}$, où $g \in M_n^{k+1}$ et où $\xi \in R^n$. L'image $\delta(M_n^{k+1})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(R^n, E_n^k / \mathcal{L}_k)$. La formule précédente s'écrit

$$b_{z'} - b_z = \delta(g) \text{ si } z' = zg \text{ avec } g \in M_n^{k+1}.$$

Soit p la projection de $\text{Hom}(R^n, E_n^k / \mathcal{L}_k)$ sur l'espace quotient $\text{Hom}(R^n, E_n^k / \mathcal{L}_k) / \delta(M_n^{k+1})$. L'élément $p(b_{z'}) = p(b_z) = b(u)$ est indépendant du relèvement z ou z' de $u \in H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$. L'application $u \rightarrow b(u)$ définit une fonction b sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\text{Hom}(R^n, E_n^k / \mathcal{L}_k) / \delta(M_n^{k+1})$.

Le groupe de Lie G_k opère sur $\text{Hom}(R^n, E_n^k) \simeq E_n^k \otimes (R^n)^*$ par la représentation linéaire λ donnée par $\lambda(g) =$

$\text{ad}(g) \otimes \pi_1^k(g)^{-1}$. Or, le groupe G_k laissant stable le sous-espace vectoriel $\text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_k)$, la représentation λ induit donc une représentation $\tilde{\lambda}$ de G_k sur l'espace quotient $\text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k) / \text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_k) \simeq \text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k / \mathcal{L}_k)$. D'autre part, G_k laisse stable le sous-espace vectoriel $\delta(M_n^{k+1})$ de $\text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k / \mathcal{L}_k)$, d'où une représentation linéaire ν de G_k sur l'espace vectoriel $\text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k / \mathcal{L}_k) / \delta(M_n^{k+1})$.

Le sous-groupe régulier G_k de $\bar{L}_n^k$ est produit semi-direct de $G_1 = \pi_1^k(G_k)$ et $\text{Ker}(G_k \rightarrow G_1)$. Pour étudier la variation de la fonction b sur $H_{G_k}(V_n)$ le long d'une fibre, il suffit de considérer les deux cas suivants:

(i) Cas où $g \in G_1$: Soit $z \in H^{k+1}(V_n)$ tel que $\pi_{k+1}^k(z) = u \in H_{G_k}(V_n)$. Alors zg est un élément de $H^{k+1}(V_n)$ dont la projection d'ordre k est $ug \in H_{G_k}(V_n)$. L'application $b_{zg} \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k / \mathcal{L}_k)$ est donnée par

$$\begin{aligned} b_{zg}(\xi) &= q \cdot \tilde{z}g^{-1}(v(\tilde{z}g(\xi))) \\ &= q \cdot \tilde{z}g^{-1}(v\{(TR_g \cdot \tilde{z} \cdot \rho(g))(\xi)\}) \\ &= q \cdot \tilde{z}g^{-1} \cdot TR_g(v(\tilde{z}(g \cdot \xi))) \\ &= q \cdot \text{ad}(g^{-1}) \cdot \tilde{z}^{-1}(v(\tilde{z}(g \cdot \xi))) \\ &= \{\tilde{\lambda}(g^{-1}) \cdot b_z\}(\xi), \end{aligned}$$

d'où

$$b(ug) = \nu(g^{-1}) b(u).$$

(ii) Cas où $g \in \text{Ker}(G_k \rightarrow G_1)$: Soit $g' \in \text{Ker}(G_k^{(1)} \rightarrow G_1)$ tel que $\pi_{k+1}^k(g') = g$. Un tel élément existe car $G_k^{(1)} \rightarrow G_k$ est surjective. Si z est un relèvement de $u \in H_{G_k}(V_n)$

dans $H^{k+1}(V_n)$, c'est-à-dire $z \in H^{k+1}(V_n)$ et $\pi_k^{k+1}(z) = u$, alors zg' est un relèvement de $ug \in H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$. L'application $b_{zg'} \in \text{Hom}(R^n, \mathcal{L}_n^k/\mathcal{L}_k)$ est donnée par

$$b_{zg'}(\xi) = q \cdot \tilde{zg'}^{-1}(v(\tilde{zg'}(\xi))).$$

Comme $g' \in \text{Ker}(G_k^{(1)} \rightarrow G_1)$, $\rho(g') \cdot \xi = \xi + \xi'$, où $\xi \in R^n$ et où $\xi' \in \mathcal{L}_k$. On a ainsi

$$\begin{aligned} b_{zg'}(\xi) &= q \cdot \tilde{zg'}^{-1}(v\{(TR_g \cdot \tilde{z} \cdot \rho(g'))(\xi)\}) \\ &= q \cdot \tilde{zg'}^{-1}\{TR_g(v(\tilde{z}(\xi))) + TR_g \cdot \tilde{z}(\xi')\} \\ &= q \cdot \rho(g')^{-1} \cdot \tilde{z}^{-1}\{v(\tilde{z}(\xi)) + \tilde{z}(\xi')\} \\ &= q \cdot \text{ad}(g^{-1}) \cdot \tilde{z}^{-1}\{v(\tilde{z}(\xi)) + \tilde{z}(\xi')\} \\ &= q \cdot \text{ad}(g^{-1}) \cdot \tilde{z}^{-1}(v(\tilde{z}(\xi))) \\ &= \{\tilde{\lambda}(g^{-1}) \cdot b_z\}(\xi), \end{aligned}$$

d'où

$$b(ug) = \nu(g^{-1})b(u).$$

On énoncera:

PROPOSITION III.7

La fonction b définit un tenseur sur $H_{G_k}(V_n)$, appelé tenseur de structure (de deuxième espèce) de la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$.

Le résultat suivant montre que le tenseur de structure (de deuxième espèce) de $H_{G_k}(V_n)$ est un obstacle à la presque intégrabilité de $H_{G_k}(V_n)$.

THEOREME III.8

Une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable si et seulement si le tenseur de structure (de deuxième espèce) est nul.

D'après la définition du tenseur de structure b , il est clair que, si la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable, le tenseur de structure est nul.

Réciproquement, supposons que le tenseur de structure b

est nul. Pour tout relèvement z de $u \in H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$, il existe un $g \in M_n^{k+1}$ tel que $b_z = \delta(g)$.

L'élément $z' = zg$ appartient à $H^{k+1}(V_n)$ et $\pi_{k+1}^{k+1}(z') = \pi_{k+1}^{k+1}(z) = u$. Par conséquent, nous avons $b_z - b_{z'} = \delta(g)$, ce qui entraîne que $\hat{b}_{z'} = 0$. Il en résulte que $z' \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$.

Nous avons ainsi montré que, pour tout $u \in H_{G_k}(V_n)$, il existe un repère $z' \in \bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ tel que

$\pi_{k+1}^{k+1}(z') = u$. La G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est donc presque intégrable en vertu de la proposition III.3 .

(C) P. Libermann a défini pour une G -structure $H_G(V_n)$ du premier ordre des tenseurs de structure d'ordre supérieur qui sont des fonctions sur $H_G(V_n)$ à valeurs dans certains espaces d'orbites. [16i] . Suivant cette idée, nous allons définir encore deux autres fonctions de structure pour une G_k -structure régulière d'ordre k

sur V_n .

(i) Considérons une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$. Soit $\bar{\varphi}$ (resp. φ) un relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ (resp. $H^{k+1}(V_n)$). Pour tout $u \in H_{G_k}(V_n)$, nous posons $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}(u)$ où $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}(u) \in \bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow \bar{L}_n^k)$. L'application $u \rightarrow \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}(u)$ définit une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $\bar{M}_n^{k+1}$. Soit $M_n^{k+1} = \text{Ker}(L_n^{k+1} \rightarrow L_n^k)$. Les groupes $\bar{M}_n^{k+1}$ et M_n^{k+1} sont des groupes abéliens isomorphes à certains espaces vectoriels. Soit r la projection canonique de $\bar{M}_n^{k+1}$ sur $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$. L'application composée $\Delta(\bar{\varphi}) = r \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ définit une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$, appelée "H-déviations de $\bar{\varphi}$ ". Cette fonction est indépendante du choix de φ . En effet, si φ' est un autre relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$, nous avons $\bar{\varphi}(u) = \varphi'(u) \lambda_{\varphi', \bar{\varphi}}(u)$. Puisque $\varphi'(u) = \varphi(u) \lambda_{\varphi, \varphi'}(u)$ avec $\lambda_{\varphi, \varphi'}(u) \in M_n^{k+1}$, nous avons donc $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) \lambda_{\varphi, \varphi'}(u) \lambda_{\varphi', \bar{\varphi}}(u)$, ce qui implique que $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} = \lambda_{\varphi, \varphi'} \lambda_{\varphi', \bar{\varphi}}$. La fonction $\lambda_{\varphi, \varphi'}$ prend ses valeurs dans M_n^{k+1} ; par conséquent, $r \circ \lambda_{\varphi', \bar{\varphi}} = r \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$.

Soit $\bar{\varphi}'$ un autre relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$. La "H-déviations de $\bar{\varphi}'$ " est donnée par

$$\Delta(\bar{\varphi}') = r \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}'} = r \circ (\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} \lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}),$$

où $\lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}$ est une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans

$N_{\bar{G}_k^{(u)}} = \text{Ker}(\bar{G}_k^{(1)} \longrightarrow G_k)$ définie par : $\bar{\varphi}'(u) = \bar{\varphi}(u) \lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}(u)$.
 Si $m \in \bar{M}_n^{k+1}$, nous désignerons par $[m]$ l'image de m par r . Le groupe de Lie $\bar{M}_n^{k+1}$ opère d'une façon naturelle sur $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$: si $m \in \bar{M}_n^{k+1}$ et $[x] \in \bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$, nous posons $m[x] = [mx]$. Le groupe $N_{\bar{G}_k^{(u)}}$ est un sous-groupe de $\bar{M}_n^{k+1}$, d'où une opération de $N_{\bar{G}_k^{(u)}}$ sur $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$. Soit $\mathcal{O}$ l'espace des orbites de $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$ sous l'action de groupe $N_{\bar{G}_k^{(u)}}$ et soit S la projection naturelle de $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$ sur $\mathcal{O}$. Nous avons

$$\begin{aligned} S \circ \Delta(\bar{\varphi}') &= S \circ r \circ (\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} \lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}) \\ &= S \circ r \circ (\lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'} \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}) \\ &= S \circ r \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} \\ &= S \circ \Delta(\bar{\varphi}). \end{aligned}$$

La fonction composée $S \circ \Delta(\bar{\varphi}') = S \circ \Delta(\bar{\varphi}) = \tilde{\Delta}$ s'appellera fonction de structure (de troisième espèce) de la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$.

Nous dirons que la fonction de structure $\tilde{\Delta}$ est "nulle" si elle est à valeurs dans l'orbite de $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$ passant par l'élément zéro de l'espace vectoriel $\bar{M}_n^{k+1} / M_n^{k+1}$.

THEOREME III.9

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ soit presque intégrable est que la fonction de structure $\tilde{\Delta}$ (de troisième espèce) soit nulle sur $H_{G_k}(V_n)$.

D'après la définition de la fonction de structure $\tilde{\Delta}$, il est évident que, si $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable, la fonction $\tilde{\Delta}$ est nulle. Inversement, soit $\bar{\varphi}$ (resp. φ) un relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ (resp. $H^{k+1}(V_n)$). Nous avons $\bar{\varphi} = \varphi \cdot \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$, où $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ est une application de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{M}_n^{k+1}$. La nullité de la fonction de structure $\tilde{\Delta} = S \circ r \cdot \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ entraîne que la fonction $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ sur $H_{G_k}(V_n)$ est à valeurs dans $N_{\bar{G}_k^{(1)}} \cdot \bar{M}_n^{k+1} = \bar{M}_n^{k+1} \cdot N_{\bar{G}_k^{(1)}}$, car $\bar{M}_n^{k+1}$ est un groupe abélien. Les raisonnements employés dans la démonstration de la proposition III.3 montrent qu'on peut décomposer $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} = \mu \cdot \nu$, où μ (resp. ν) est une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $\bar{M}_n^{k+1}$ (resp. $N_{\bar{G}_k^{(1)}}$). L'application $\bar{\varphi} \cdot \nu^{-1} = \varphi \cdot \mu$ définit un relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$, d'où la presque intégrabilité de la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ en vertu de la proposition III.3.

(ii) Soit toujours $H_{G_k}(V_n)$ une G_k -structure régulière. Soit φ (resp. $\bar{\varphi}$) un relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$ (resp. $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$). Pour tout point u de $H_{G_k}(V_n)$, nous écrivons $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}(u)$, où $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ est une application de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow \bar{L}_n^k)$. Soit $N_{\bar{G}_k^{(1)}} = \text{Ker}(\bar{G}_k^{(1)} \rightarrow G_k)$ et soit t la projection naturelle de $\bar{M}_n^{k+1}$ sur $\bar{M}_n^{k+1} / N_{\bar{G}_k^{(1)}}$. L'application composée $\nabla(\varphi) =$

$t \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$ définit une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$, appelée " G_k -déviation de φ ". Cette fonction est indépendante du choix de $\bar{\varphi}$. En effet, si $\bar{\varphi}'$ est un autre relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$, nous avons $\bar{\varphi}'(u) = \bar{\varphi}(u) \lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}(u)$ et $\bar{\varphi}'(u) = \varphi(u) \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}'}(u)$. Il en résulte que $\lambda_{\varphi, \bar{\varphi}'} = \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} \cdot \lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}$. Puisque la fonction $\lambda_{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'}$ est à valeurs dans $N_{G_k}^{(1)}$, nous avons donc $t \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}'} = t \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}$.

Si φ' est un autre relèvement de $H_{G_k}(V_n)$ dans $H^{k+1}(V_n)$, nous avons $\varphi = \varphi' \cdot \lambda_{\varphi', \varphi}$ où $\lambda_{\varphi', \varphi}$ est une fonction sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $M_n^{k+1} = \text{Ker}(L_n^{k+1} \rightarrow L_n^k)$. La " G_k -déviation de φ' " est donnée par $\nabla(\varphi') = t \circ \lambda_{\varphi', \bar{\varphi}} = t \circ (\lambda_{\varphi', \varphi} \cdot \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}})$.

Si $m \in \bar{M}_n^{k+1}$, nous désignerons par $[[m]]$ l'image de m par t . Le groupe de Lie $\bar{M}_n^{k+1}$ opère d'une façon naturelle sur $\bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$: si $m \in \bar{M}_n^{k+1}$ et $[[x]] \in \bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$, nous posons $m[[x]] = [[mx]]$. Le groupe M_n^{k+1} , étant un sous-groupe de $\bar{M}_n^{k+1}$, opère ainsi sur $\bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$. Soit Q l'espace des orbites de $\bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$ sous l'action du groupe M_n^{k+1} et soit w la surjection naturelle de $\bar{M}_n^{k+1} / N_{G_k}^{(1)}$ sur Q . Nous avons

$$\begin{aligned} w \circ \nabla(\varphi') &= w \circ t \circ (\lambda_{\varphi', \varphi} \cdot \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}}) \\ &= w \circ t \circ \lambda_{\varphi, \bar{\varphi}} \\ &= w \circ \nabla(\varphi). \end{aligned}$$

La fonction composée $w \cdot \nabla(\varphi') = w \cdot \nabla(\varphi) = \tilde{\nabla}$ s'appellera fonction de structure (de quatrième espèce) de la G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$.

Nous dirons que la fonction de structure $\tilde{\nabla}$ est " nulle " si elle est à valeurs dans l'orbite de $M_n^{k+1}/N_{G_k}^{(1)}$ passant par l'élément zéro de l'espace vectoriel $M_n^{k+1}/N_{G_k}^{(1)}$. Comme dans le cas précédent, nous démontrons

THEOREME III.10

Une G_k -structure régulière $H_{G_k}(V_n)$ est presque intégrable si et seulement si la fonction de structure $\tilde{\nabla}$ (de quatrième espèce) est nulle sur $H_{G_k}(V_n)$.

3. G -structures du premier ordre.

Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Considérons une G -structure $H_G(V_n)$ du premier ordre sur V_n . Toute G -structure du premier ordre est régulière; on peut définir les divers tenseurs de structure de $H_G(V_n)$. Le premier prolongement semi-holonome $\bar{H}_G^{(1)}(V_n)$ de $H_G(V_n)$ est un espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $\bar{G}^{(1)}$. Le prolongement semi-holonome du prolongement $\bar{H}_G^{(1)}(V_n)$ est muni d'une structure d'espace fibré principal de base V_n et de groupe structural $\bar{G}^{(2)}$, appelé deuxième prolongement semi-holonome de $H_G(V_n)$; il sera noté $\bar{H}_G^{(2)}(V_n)$. Par itération, on définit le k -ième prolongement semi-

holonome de $H_G(V_n)$: c'est un sous-espace fibré principal $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ de groupe structural $\bar{G}^{(k)}$ de $\bar{H}^{k+1}(V_n)$. Nous poserons $G^{(k)} = \bar{G}^{(k)} \cap L_n^{k+1}$ et $H_G^{(k)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$. Bien que $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ existe toujours, l'intersection $H_G^{(k)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ peut être vide. Si l'intersection $\{\bar{H}_G^{(k)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ de deux fibres au-dessus de $x \in V_n$ n'est pas vide et si $u \in \{\bar{H}_G^{(k)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$, alors $uG^{(k)} = \{\bar{H}_G^{(k)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$.

Une G-structure $H_G(V_n)$ du premier ordre sur V_n sera dite k-intégrable si le k-ième prolongement semi-holonome $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ admet un sous-espace fibré principal $H_G^{(k)}(V_n)$ de groupe structural $G^{(k)} = \bar{G}^{(k)} \cap L_n^{k+1}$ contenu dans $H^{k+1}(V_n)$. On a alors

$$H_G^{(k)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n).$$

PROPOSITION III.11 [16i]

Une G-structure $H_G(V_n)$ est k-intégrable si et seulement si, pour tout x de V_n , l'intersection $\{\bar{H}_G^{(k)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ n'est pas vide.

Il suffit de montrer que la condition est suffisante. Supposons que $\{\bar{H}_G^{(k)}(V_n)\}_x \cap \{H^{k+1}(V_n)\}_x$ n'est pas vide pour tout x de V_n . Montrons que $H_G^{(k)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$ est un espace fibré principal. Pour cela, il suffit de montrer que $H_G^{(k)}(V_n)$ admet des sections locales. La

preuve se fait par récurrence. Supposons que $H_G^{(k-1)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k-1)}(V_n) \cap H^k(V_n)$ est un espace fibré principal sur V_n . La variété V_n étant paracompacte, il existe des sections invariantes de $H_G(V_n)$ dans $H_G^{(k-1)}(V_n)$, c'est-à-dire des relèvements de $H_G(V_n)$ dans $H_G^{(k-1)}(V_n)$ compatibles avec l'injection canonique de G dans $G^{(k-1)}$. Soit φ_k une telle section invariante. Considérons maintenant une section invariante $\bar{\varphi}_{k+1}$ (resp. φ_{k+1}) de $H_G(V_n)$ dans $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ (resp. $H^{k+1}(V_n)$) telle que $\pi_k^{k+1} \cdot \bar{\varphi}_{k+1} = \varphi_k$ (resp. $\pi_k^{k+1} \cdot \varphi_{k+1} = \varphi_k$). Si $u \in H_G(V_n)$, nous posons $\varphi_{k+1}(u) = \bar{\varphi}_{k+1}(u) \lambda(u)$, où λ est une fonction différentiable sur $H_G(V_n)$ à valeurs dans $M_n^{k+1} \cdot \check{N} \subset M_n^{k+1}$ avec $\bar{M}_n^{k+1} = \text{Ker}(\bar{L}_n^{k+1} \rightarrow \bar{L}_n^k)$, $M_n^{k+1} = \text{Ker}(L_n^{k+1} \rightarrow L_n^k)$ et $\check{N} = \text{Ker}(\bar{G}^{(k)} \rightarrow \bar{G}^{(k-1)}) \cap (\pi_k^{k+1})^{-1}(G^{(k-1)})$. Les groupes M_n^{k+1} et $\check{N}$ sont des groupes abéliens isomorphes aux espaces vectoriels $R^n \otimes {}^{k+1}\mathcal{O}(R^n)^*$ et $\mathcal{L}_f^{(k-1)} \otimes (R^n)^*$, où $\mathcal{L}_f^{(k-1)}$ est l'algèbre de Lie de $G^{(k-1)}$; en prenant dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{L}_f^{(k-1)} \otimes (R^n)^*$ et $R^n \otimes {}^{k+1}\mathcal{O}(R^n)^*$ un supplémentaire W de $\mathcal{L}_f^{(k-1)} \otimes (R^n)^*$ contenu dans $R^n \otimes {}^{k+1}\mathcal{O}(R^n)^*$, c'est-à-dire un supplémentaire W de $(\mathcal{L}_f^{(k-1)} \otimes (R^n)^*) \cap (R^n \otimes {}^{k+1}\mathcal{O}(R^n)^*) = \mathcal{L}_f^{(k)}$ dans $R^n \otimes {}^{k+1}\mathcal{O}(R^n)^*$, on obtient une décomposition $\lambda = \mu \cdot \nu$, où μ (resp. ν) est une fonction différentiable sur $H_G(V_n)$ à valeurs dans $\check{N}$ (resp. M_n^{k+1}). L'application $\varphi_{k+1} \cdot \nu^{-1} = \bar{\varphi}_{k+1} \cdot \mu$ définit un relèvement de $H_G(V_n)$

dans $H_G^{(k)}(V_n) = \bar{H}_G^{(k)}(V_n) \cap H^{k+1}(V_n)$. L'ensemble $H_G^{(k)}(V_n)$ admet donc des sections locales sur V_n , puisque $H_G(V_n)$ est localement trivial. Les mêmes raisonnements sont toujours valables dans le cas où $k = 1$; ainsi s'achève la démonstration.

Une $\mathcal{E}$ -connexion $\varphi_{k+1} : H^1(V_n) \longrightarrow \bar{H}^{k+1}(V_n)$ s'appellera G-connexion d'ordre k si le relèvement φ_{k+1} applique $H_G(V_n)$ dans $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$. La restriction de φ_{k+1} à $H_G(V_n)$ définit une section invariante de $H_G(V_n)$ dans $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$. Inversement, toute section invariante de $H_G(V_n)$ dans $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ s'étend d'une façon canonique en une section invariante de $H^1(V_n)$ dans $\bar{H}^{k+1}(V_n)$, d'où une G-connexion. Par abus de langage, nous dirons parfois qu'une section invariante de $H_G(V_n)$ dans $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ est une G-connexion d'ordre k sur V_n .

PROPOSITION III.12 [16i]

Pour qu'une G-structure $H_G(V_n)$ soit k-intégrable, il faut et il suffit qu'il existe une G-connexion symétrique d'ordre k sur V_n .

La condition est évidemment suffisante; elle est aussi nécessaire. En effet, l'espace $G^{(k)}/\mathcal{L}^{k+1}(G)$ est diffeomorphe à un espace numérique; si le sous-espace fibré principal $H_G^{(k)}(V_n)$ existe, il existe des G-connexions symétriques d'ordre k sur V_n .

Soit $H_G(V_n)$ une G -structure qui est $(k-1)$ -intégrable. L'intersection $\bar{H}_G^{(k-1)}(V_n) \cap H^k(V_n) = H_G^{(k-1)}(V_n)$ est un sous-espace fibré principal de $\bar{H}^k(V_n)$. De plus, $H_G^{(k-1)}(V_n)$ est une $G^{(k-1)}$ -structure régulière d'ordre k sur V_n [9]. La G -structure $H_G(V_n)$ est k -intégrable si et seulement si la $G^{(k-1)}$ -structure régulière $H_G^{(k-1)}(V_n)$ est presque intégrable. La $G^{(k-1)}$ -structure $H_G^{(k-1)}(V_n)$ étant régulière, nous pouvons définir sur $H_G^{(k-1)}(V_n)$ les divers tenseurs de structure (resp. fonctions de structure) appelés tenseurs de structure (resp. fonction de structure) d'ordre k de $H_G(V_n)$.

THEOREME III.13 [9] [16i]

Soit $H_G(V_n)$ une G -structure qui est $(k-1)$ -intégrable.
La nullité du tenseur de structure (resp. de la fonction
de structure) d'ordre k (de diverses espèces) est une
condition nécessaire et suffisante pour que $H_G(V_n)$ soit
 k -intégrable.

Soient V_n et V'_n des variétés différentiables. Soit $H_G(V_n)$ (resp. $H_G(V'_n)$) une G -structure du premier ordre sur V_n (resp. V'_n). Nous dirons que $H_G(V_n)$ est équivalente à $H_G(V'_n)$ s'il existe un difféomorphisme f de V_n sur V'_n tel que le difféomorphisme induit $f^{(1)}$ de $H^1(V_n)$ sur $H^1(V'_n)$ applique $H_G(V_n)$ sur $H_G(V'_n)$. Il en

résulte que $f^{(k+1)}$ envoie $\bar{H}_G^{(k)}(V_n)$ sur $\bar{H}_G^{(k)}(V'_n)$. Si $H_G(V_n)$ est équivalente à $H_G(V'_n)$, alors $H_G(V_n)$ est k -intégrable si et seulement si $H_G(V'_n)$ est k -intégrable.

Une G -structure $H_G(V_n)$ sur V_n sera dite intégrable si $H_G(V_n)$ est localement équivalente, en chaque point x de V_n , à la G -structure canonique $H_G(R^n) = R^n \times G$ sur R^n . Si $H_G(V_n)$ est intégrable, alors elle est k -intégrable pour tout entier $k \geq 1$.

Un sous-groupe de Lie G de L_n^1 sera dit de type fini s'il existe un entier positif k tel que $G^{(k-1)} = \bar{G}^{(k-1)} \cap L_n^k$ est isomorphe à $G^{(k)} = \bar{G}^{(k)} \cap L_n^{k+1}$. Il en résulte que les groupes $G^{(k)}, G^{(k+1)}, G^{(k+2)}, \dots$ sont tous isomorphes. Le groupe de Lie G sera dit de type fini k si k est le plus petit entier tel que $G^{(k)}$ soit isomorphe à $G^{(k-1)}$.

THEOREME III. 4 (Guillemin)

Si G est de type fini k , toute G -structure qui est $(k+1)$ -intégrable est intégrable.

Pour la démonstration de ce résultat dû à Guillemin, nous renvoyons à son travail [9].

C H A P I T R E I V

G-STRUCTURES GEOMETRIQUES ET G-CONNEXIONS

1. G-structures géométriques.

Les structures qui font l'objet de la géométrie différentielle peuvent être définies en partant de la notion de prolongement d'une variété différentiable. Tel est le point de vue de Ehresmann. Soit V_n une variété différentiable réelle de classe C^∞ et soit Φ un sous-groupe de $\Pi^k(V_n)$, espace des k -jets inversibles de V_n dans V_n . Un prolongement d'ordre k de V_n , relativement à Φ , est une variété E munie d'une projection p sur V_n et admettant Φ comme groupe d'opérateurs [6d], [6i] : le composé θz de $\theta \in \Phi$ et $z \in E$ est défini si $\alpha(\theta) = p(z)$ et on a $p(\theta z) = \beta(\theta)$, où $\alpha(\theta)$ est la source de θ et où $\beta(\theta)$ est le but de θ .

Une structure infinitésimale pure d'ordre k au sens de Ehresmann est une section σ d'un prolongement E d'ordre k sur V_n . Si $E = H^k(V_n)/G_k$, où $H^k(V_n)$ est l'espace des repères holonomes d'ordre k sur V_n et où G_k est un sous-groupe fermé de L_n^k , la structure infinitésimale σ est une G_k -structure d'ordre k sur V_n .

Soit G_k un sous-groupe de Lie de L_n^k . L'espace fibré trivial $H_{G_k}^k(R^n) = R^n \times G_k$ est un sous-espace fibré

principal de $H^k(R^n) = R^n \times L_n^k$. Nous désignerons par $E_{G_k} = R^n \oplus \mathfrak{g}_k$ l'espace tangent à $H_{G_k}(R^n)$ à l'élément distingué e_k , où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie de G_k .

Un groupe de Lie G^* s'appellera une extension affine de G_k s'il satisfait aux conditions suivantes:

- (i) G_k est un sous-groupe fermé de G^* ;
- (ii) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ de G possède les propriétés:
 - (a) $\mathfrak{g}^* = R^n \oplus \mathfrak{g}_k$ en tant qu'espace vectoriel;
 - (b) R^n est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}^*$;
 - (c) Si $g \in G_k$ et si $\xi \in R^n$, on a

$$\text{ad}(g) \cdot \xi = \pi_1^*(g) \cdot \xi + \alpha(g, \xi)$$

où $\alpha(g, \xi)$ est un élément de $\mathfrak{g}^*$ appartenant à $\mathfrak{g}_k$. De plus, si $g \in G_k \cap \mathcal{L}(L_n^1)$, alors $\alpha(g, \xi) = 0$ pour tout $\xi \in R^n$.

Une extension affine G^* de G_k sera dite normale s'il existe un homomorphisme injectif ν de G_k dans $\bar{L}_n^{k+1}$ tel que

- (i) $\pi_k^{k+1} \cdot \nu = \text{identité}$;
- (ii) $\text{ad}(g) \cdot \xi = (\rho(\nu(g)) \cdot \xi$ pour tout $g \in G_k$ et tout $\xi \in R^n$, où ρ est la représentation de $\bar{L}_n^{k+1}$ sur l'espace vectoriel $\bar{E}^k \supset E_{G_k}$.

Si G^* est une extension affine normale de G_k , l'homo-

morphisme injectif ν est unique, car la représentation ρ est fidèle. D'ailleurs, ν est un relèvement de G_k dans $\bar{G}_k^{(1)}$.

Une géométrie d'ordre k sur R^n sera donnée par $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_k; G^*)$, où G_i est un sous-groupe régulier de $\bar{L}_n^i$ ($1 \leq i \leq k$) vérifiant la condition $G_i = \pi_i^k(G_k)$ et où G^* est une extension affine de G_k .

EXEMPLES:

(A) Soit A_n le groupe des transformations affines sur R^n . Le groupe A_n est une extension affine normale de L_n^1 . La géométrie définie par $(L_n^1; A_n)$ est la géométrie affine sur R^n .

(B) Soit $P_n(R)$ l'espace projectif réel de dimension n. Soit $\{x^0, x^1, \dots, x^n\}$ un système de coordonnées homogènes sur $P_n(R)$. Le groupe des transformations projectives sur $P_n(R)$, noté P_n , est le groupe linéaire général L_{n+1}^1 modulo son centre; l'action de P_n sur $P_n(R)$ est induite par celle de L_{n+1}^1 sur R^{n+1} . Considérons une matrice $S = (S_{\beta}^{\alpha}) \in L_{n+1}^1$; elle induit une transformation projective $\bar{S}$ sur $P_n(R)$. Supposons que $S_0^0 \neq 0$ et soit $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ un système de coordonnées non homogènes sur $P_n(R)$, où $y^i = x^i / x^0$. La transformation $\bar{S}$ est donnée par

$$z^i = \{a^i + \sum a_j^i y^j\} / \{1 + \sum a_j y^j\},$$

où $a^i = S^i_0/S^0_0$, $a^i_j = S^i_j/S^0_0$, et $a_j = S^0_j/S^0_0$ ($1 \leq i, j \leq n$).

Soit $\mathcal{L}^1_n$ l'espace des $n \times n$ matrices. L'algèbre de Lie $\mathcal{P}_n$ de P_n est une somme directe

$$\mathcal{P}_n = R^n \oplus \mathcal{L}^1_n \oplus (R^n)^*,$$

où les éléments de R^n sont considérés comme des $n \times 1$ matrices.

L'opération de crochet est donnée par: si $x, y \in R^n$, $x^*, y^* \in (R^n)^*$ et $X, Y \in \mathcal{L}^1_n$,

$$[x, y] = 0;$$

$$[x^*, y^*] = 0;$$

$$[X, x] = Xx;$$

$$[x^*, X] = x^*X;$$

$$[X, Y] = XY - YX;$$

$$[x, x^*] = x x^* + x^* x I_n,$$

où I_n est la $n \times n$ matrice (δ^i_j) .

Soit O le point de $P_n(R)$ défini par les coordonnées homogènes $(1, 0, \dots, 0)$ ou par les coordonnées non homogènes $(0, 0, \dots, 0)$. Nous désignerons par H le sous-groupe d'isotropie de P_n au point $O \in P_n(R)$.

L'espace projectif réel $P_n(R)$ peut être identifié avec l'espace homogène P_n/H . En termes des coordonnées non homogènes, une transformation projective f de $P_n(R)$ appartient à H si et seulement si elle peut s'écrire sous

$$\begin{aligned} z^i &= \left\{ \sum a^i_j y^j \right\} / \left\{ 1 + \sum a_j y^j \right\} \\ &= \sum a^i_j y^j - \frac{1}{2} \sum (a^i_j a_k + a^i_k a_j) y^j y^k + \dots \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H est une somme directe

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{L}_n^1 \oplus (\mathbb{R}^n)^*.$$

Nous avons ainsi la décomposition

$$P_n = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{h}.$$

Soit f une transformation projective sur $P_n(\mathbb{R})$ appartenant à H . L'application $f \longrightarrow j_0^2 f$ définit un homomorphisme injectif de H dans L_n^2 [13] ; l'image de H par cet homomorphisme est un sous-groupe régulier G_2 de L_n^2 . D'ailleurs, P_n est une extension affine normale de G_2 . La géométrie d'ordre 2 définie par $(L_n^1, G_2; P_n)$ n'est autre que la géométrie projective classique.

(C) Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique définie par la forme quadratique associée à la matrice $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$. Un point de $\mathbb{R}^n$ sera représenté par $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Soit $\{x^0, x^1, \dots, x^n, x^\infty\}$ un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{n+2}$ muni de la métrique définie par la matrice

$$\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon_{ij} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\Xi^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compactification de $\mathbb{R}^n$ obtenue en ajoutant un "point à l'infini", et soit $P_{n+1}(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension $n+1$ construit à partir de $\mathbb{R}^{n+2}$. Soit Q la quadrique dans $P_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par l'équation

$$\sum \varepsilon_{jk} x^j x^k - 2 x^0 x^\infty = 0 .$$

L'espace Ξ^n , qui est homéomorphe à Q , s'appellera espace de Möbius de dimension n . Soit $\tilde{O}_{n+2}$ le sous-groupe de L_{n+2}^1 formé des éléments qui laissent invariante la métrique $\tilde{\varepsilon}$. Chaque élément de $\tilde{O}_{n+2}$ induit une transformation sur Ξ^n . Le groupe des transformations sur Ξ^n induites par les éléments de $\tilde{O}_{n+2}$ s'appellera groupe de Möbius de Ξ^n et sera noté K_n . Soit $\text{co}(n)$ l'algèbre de Lie de $\text{CO}(n)$, groupe conforme relativement à la métrique ε . L'algèbre de Lie $\mathcal{K}_n$ de K_n est une somme directe

$$\mathcal{K}_n = \mathbb{R}^n \oplus \text{co}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^*,$$

où l'opération de crochet est donnée par [26a] : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x^*, y^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $X, Y \in \text{co}(n)$,

$$[x, y] = 0 ;$$

$$[x^*, y^*] = 0 ;$$

$$[X, x] = X x ;$$

$$[x^*, X] = x^* X ;$$

$$[X, Y] = XY - YX ;$$

$$[x, x^*] = x \otimes x^* - \widetilde{x^* \otimes x} + x^* x I_n ,$$

où $\widetilde{x^* \otimes x}$ désigne le dual de $x^* \otimes x$ sous l'isomorphisme $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ et où I_n est la matrice identité.

Soit O le point de Ξ^n défini par les coordonnées $(0, \dots, 0)$. Nous désignerons par M le sous-groupe d'isotropie de K_n au point $O \in \Xi^n$. L'espace de Möbius

peut être identifié avec l'espace homogène K_n/M . Le groupe d'isotropie M est un produit semi-direct de $CO(n)$ et $(R^n)^*$, et son algèbre de Lie $\mathcal{M}$ est une somme directe

$$\mathcal{M} = co(n) \oplus (R^n)^*.$$

Nous avons donc la décomposition

$$K_n = R^n \oplus \mathcal{M}.$$

Soit $S = (S_{\beta}^{\alpha}) \in \tilde{O}_{n+2}$ avec $S_0^0 \neq 0$. Soit f la transformation induite sur E^n . Si f appartient à M , elle s'écrit [26a]

$$z^i = \sum a_j^i x^j + \sum \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha m} \varepsilon_{jk} a_{\alpha}^i a_m^i - a_j^i a_k^i - a_k^i a_j^i) x^j x^k + \dots$$

où $a^i = S_0^i/S_0^0$, $a_j^i = S_j^i/S_0^0$ et $a_j = S_j^0/S_0^0$ avec $(a_j^i) \in CO(n)$. L'application $f \rightarrow j_0^2 f$ définit un homomorphisme injectif de M dans L_n^2 ; l'image de M par cet homomorphisme est un sous-groupe régulier G_2 de L_n^2 . Le groupe de Möbius K_n est une extension affine de G_2 . Si $n \geq 3$, l'extension K_n de G_2 est une extension affine normale et la géométrie définie par $(CO(n), G_2; K_n)$ correspond à la géométrie conforme classique [10a].

(D) Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 qui est de type fini k . Nous désignerons par $G^{(i)} = \bar{G}^{(i)} \cap L_n^{i+1}$ le i -ième prolongement holonome de G . Les groupes de Lie $G, G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(k-1)}$ sont des sous-groupes réguliers. Puisque $G^{(k)} \simeq G^{(k-1)}$, l'espace vectoriel

$R^n \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$ est muni d'une façon naturelle d'une structure d'algèbre de Lie, où $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ est l'algèbre de Lie de $G^{(k-1)}$ [9]. Soit G^* le groupe de Lie correspondant à l'algèbre de Lie $R^n \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$; G^* est une extension affine normale de $G^{(k-1)}$. Les données $(G, G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(k-1)}; G^*)$ constituent donc une géométrie. Par exemple, si $G = O_n$, groupe orthogonal de R^n , on a $G^{(1)} \simeq G$, c'est-à-dire O_n est de type fini 1 et on a la géométrie riemannienne.

Soit $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_k; G^*)$ une géométrie d'ordre k sur R^n . Une $\mathbf{G}$ -structure géométrique d'ordre k sur une variété différentiable V_n sera donnée par une suite de sous-espaces fibrés principaux $H_{G_1}(V_n), H_{G_2}(V_n), \dots, H_{G_k}(V_n)$ tels que

(i) $H_{G_m}(V_n)$ est une G_m -structure régulière, pour $m = 1, 2, \dots, k$;

(ii) $H_{G_m}(V_n) = \pi_m^k (H_{G_k}(V_n))$ pour tout $m < k$.

Une telle structure géométrique sera dite normale si G^* est une extension affine normale de G_k .

REMARQUES:

1°. Soit $\mathbf{G} = (L_n^1, G_2; P_n)$ la géométrie projective de l'exemple (B). Une $\mathbf{G}$ -structure géométrique sur V_n s'appelle une structure projective sur la variété V_n . Puisque $G_1 = L_n^1$, une structure projective sur V_n est complètement déterminée par la donnée d'une G_2 -structure

$H_{G_2}(V_n)$ contenue dans $H^2(V_n)$. On rejoint ainsi le point de vue de Kobayashi-Nagano [13] .

2°. Soit $\mathbb{G} = (CO(n), G_2 ; K_n)$ la géométrie conforme de l'exemple (C). Une telle $\mathbb{G}$ -structure géométrique sur V_n s'appelle une structure conforme sur V_n . Une structure conforme sera complètement déterminée par la donnée d'une G_2 -structure régulière sur V_n . Il est à signaler que notre définition est légèrement différente de celle formulée par Ogiue [26a] .

2. Connexions de Cartan.

Soit $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots, G_k ; G^*)$ une géométrie d'ordre k . Nous nous donnons une fois pour toutes une $\mathbb{G}$ -structure géométrique sur V_n définie par la suite de sous-espaces fibrés principaux $H_{G_1}(V_n), H_{G_2}(V_n), \dots, \dots, H_{G_k}(V_n)$. Comme G^* est une extension affine de G_k , nous pouvons considérer des connexions de Cartan dans l'espace fibré principal $H_{G_k}(V_n)$. Rappelons qu'une connexion de Cartan dans $H_{G_k}(V_n)$ est donnée par une 1-forme différentielle ω sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $\mathfrak{g}^* = R^n \oplus \mathfrak{g}_k$ vérifiant les conditions:

- (i) $\omega(A^*) = A$ pour tout champ de vecteurs fondamental A^* associé à $A \in \mathfrak{g}_k$;
- (ii) $\omega(\text{TR}_g(X)) = \text{ad}(g^{-1})\omega(X)$ pour tout vecteur X tangent à $H_{G_k}(V_n)$ et tout $g \in G_k$;

(iii) $\omega(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

Si la variété V_n est paracompacte, une telle connexion existe toujours. Désormais, nous supposons que V_n est paracompacte. La propriété (iii) entraîne qu'il existe un parallélisme absolu sur $H_{G_k}(V_n)$: à chaque élément $\xi \in \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_k$ est associé un champ de vecteurs $\xi^\dagger$ sur $H_{G_k}(V_n)$ défini par la condition : $\omega(\xi^\dagger) = \xi$.

PROPOSITION IV.1

Soit ω une connexion de Cartan sur $H_{G_k}(V_n)$.

On a la formule

$$[A^\dagger, \xi^\dagger] = [A, \xi]^\dagger,$$

où $A \in \mathfrak{g}_k$ et où $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Soit $\varphi : t \rightarrow \varphi_t$ le sous-groupe à 1-paramètre de G_k engendré par l'élément $A \in \mathfrak{g}_k$. D'après la propriété (i), $A^\dagger$ coïncide avec le champ de vecteurs fondamental A^* associé à $A \in \mathfrak{g}_k$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \omega([A^\dagger, \xi^\dagger]) &= \omega\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\xi^\dagger - \text{TR}_{\varphi_t}(\xi^\dagger))\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \omega(\xi^\dagger) - \omega(\text{TR}_{\varphi_t}(\xi^\dagger)) \} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \xi - \text{ad}(\varphi_t)^{-1} \cdot \xi \} \\ &= [A, \xi], \end{aligned}$$

d'où la formule cherchée.

Soit donnée une connexion de Cartan ω dans $H_{G_k}(V_n)$.

Un vecteur $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ est dit horizontal si l'image de X par ω est contenue dans la R^n -composante de $\mathcal{L}^* = R^n \oplus \mathcal{L}_*$. Soit Q_u l'ensemble des vecteurs horizontaux au point $u \in H_{G_k}(V_n)$. L'espace tangent $T_u(H_{G_k}(V_n))$ est somme directe de Q_u et $\mathcal{U}_u$, où $\mathcal{U}_u$ est l'espace des vecteurs verticaux au point u . Nous désignerons par h la projection horizontale qui à chaque vecteur $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ associe sa projection sur Q_u . Nous avons l'équation de structure suivante:

PROPOSITION IV.2

Soit ω une connexion de Cartan dans $H_{G_k}(V_n)$. Nous avons

$$d\omega \cdot h = d\omega + [\omega, \omega].$$

Les deux membres de l'équation étant bilinéaires et anti-symétriques, il suffit de vérifier l'équation dans les trois cas suivants:

- (i) Soient $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$, $Y \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ deux vecteurs verticaux. Soient A^* , B^* deux champs de vecteurs fondamentaux tels que $(A^*)_u = X$ et $(B^*)_u = Y$. Le premier membre est nul, tandis que $d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = X\omega(B^*) - Y\omega(A^*) - \omega([A^*, B^*]_u) + [\omega(X), \omega(Y)] = -\omega([A, B]_u^*) + [A, B] = 0$. L'équation est donc vérifiée.

(ii) Soient X et Y deux vecteurs horizontaux.

Comme R^n est une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{L}^*$, $[\omega(X), \omega(Y)] = 0$ et l'équation se réduit à l'identité.

(iii) Soit $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ un vecteur horizontal et soit $Y \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ un vecteur vertical. Soit $\omega(X) = \xi \in R^n$ et soit $\omega(Y) = A \in \mathcal{L}_k$. Comme $h(Y) = 0$, le premier membre est nul. Or, $d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = X\omega(A^*) - Y\omega(\xi^\dagger) - \omega([\xi^\dagger, A^*]_u) + [\xi, A] = -\omega([\xi, A]^\dagger_u) + [\xi, A] = 0$. Le deuxième membre est aussi nul.

La 2-forme $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$ est une 2-forme tensorielle sur $H_{G_k}(V_n)$ à valeurs dans $\mathcal{L}^* = R^n \oplus \mathcal{L}_k$. Par différentiation extérieure de l'équation

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

on déduit

$$d\Omega = 2[\Omega, \omega].$$

Soit $\mathcal{L}_{A^*}\Omega$ la dérivée de Lie de Ω par rapport au champ de vecteurs fondamental A^* . En vertu de la formule précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^*}\Omega &= (i_{A^*} \circ d + d \circ i_{A^*})\Omega \\ &= 2 i_{A^*}[\Omega, \omega]. \end{aligned}$$

On énoncera

PROPOSITION IV.3

Soit Ω la 2-forme tensorielle définie par

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega].$$

On a les formules

$$(i) \quad d\Omega = 2 [\Omega, \omega] ;$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}_{A^*} \Omega = 2 i_{A^*} [\Omega, \omega] .$$

Relativement à la décomposition $\mathcal{L}^* = \mathbb{R}^n \oplus \mathcal{L}_k$, la 2-forme tensorielle Ω se décompose $\Omega = \Omega_t + \Omega_c$, où Ω_t (resp. Ω_c) est une 2-forme à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathcal{L}_k$), appelée forme de torsion (resp. forme de courbure) de la connexion de Cartan ω .

On appelle champ de vecteurs basique relativement à la connexion de Cartan ω tout champ de vecteurs de la forme $\xi^\dagger$, où ξ est un élément de $\mathcal{L}^*$ contenu dans $\mathbb{R}^n$. L'application $\xi \rightarrow C(\xi) = \xi^\dagger$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans le module des champs de vecteurs sur $H_{G_k}(V_n)$ vérifiant les conditions:

- (i) Pour tout point u de $H_{G_k}(V_n)$, l'ensemble $Q_u = \{C(\xi)_u\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ définit un sous-espace vectoriel de $T_u(H_{G_k}(V_n))$ complémentaire à l'espace des vecteurs verticaux au point u ;

$$(ii) \quad \text{TR}_g(C(\xi)) = \{\text{ad}(g^{-1}) \cdot \xi\}^\dagger \quad \text{pour tout } g \in G_k.$$

Réciproquement, une telle application linéaire C détermine une connexion de Cartan ω dans $H_{G_k}(V_n)$ telle que $C(\xi)$ soit un champ de vecteurs basique quel que soit $\xi \in R^n$.

LEMME IV.4

Soit ω une connexion de Cartan dans $H_{G_k}(V_n)$.

$$(i) \quad \Omega(C(\xi)_u, C(\eta)_u) = -\omega([C(\xi), C(\eta)]_u) \\ \text{pour tout } \xi \in R^n \text{ et } \eta \in R^n;$$

$$(ii) \quad \text{Si } \xi \in R^n, \eta \in R^n \text{ et } g \in G_k, \\ \omega([C(\xi), C(\eta)]_{ug}) = \text{ad}(g^{-1}) \omega([C(g_1 \cdot \xi), C(g_1 \cdot \eta)]_u) \\ \text{où } g_1 = \pi_1^k(g) \in L_n^1.$$

Du fait que R^n définit une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}^*$, on déduit

$$\begin{aligned} \Omega(C(\xi)_u, C(\eta)_u) &= d\omega(C(\xi)_u, C(\eta)_u) + [\xi, \eta] \\ &= -\omega([C(\xi), C(\eta)]_u). \end{aligned}$$

G^* étant une extension affine de G_k , on a pour tout $g \in G_k$ et pour $\xi \in R^n$,

$$\text{ad}(g) \cdot \xi = \pi_1^k(g) \cdot \xi + \alpha(g, \xi),$$

où $\alpha(g, \xi) \in \mathfrak{g}_k$. Or

$$\begin{aligned} &\text{ad}(g^{-1}) \omega([C(g_1 \cdot \xi), C(g_1 \cdot \eta)]_u) \\ &= \omega\{\text{TR}_g([C(g_1 \cdot \xi), C(g_1 \cdot \eta)]_u)\} \\ &= \omega\{[\text{TR}_g(C(g_1 \cdot \xi)), \text{TR}_g(C(g_1 \cdot \eta))]_{ug}\} \\ &= \omega\{[(\text{ad}(g^{-1}) \cdot (g_1 \cdot \xi))^\dagger, (\text{ad}(g^{-1}) \cdot (g_1 \cdot \eta))^\dagger]_{ug}\} \\ &= \omega\{[C(\xi) + \alpha(g, g_1 \cdot \xi)^\dagger, C(\eta) + \alpha(g, g_1 \cdot \eta)^\dagger]_{ug}\} \end{aligned}$$

$$= \omega([C(\xi), C(\eta)]_{ug}) + [\xi, \alpha(g, g_1 \cdot \eta)] \\ + [\alpha(g, g_1 \cdot \xi), \eta] + [\alpha(g, g_1 \cdot \xi), \alpha(g, g_1 \cdot \eta)].$$

D'autre part,

$$0 = \text{ad}(g^{-1}) [g_1 \cdot \xi, g_1 \cdot \eta] \\ = [\text{ad}(g^{-1}) \cdot (g_1 \cdot \xi), \text{ad}(g^{-1}) \cdot (g_1 \cdot \eta)] \\ = [\xi + \alpha(g, g_1 \cdot \xi), \eta + \alpha(g, g_1 \cdot \eta)] \\ = [\xi, \alpha(g, g_1 \cdot \eta)] + [\alpha(g, g_1 \cdot \xi), \eta] \\ + [\alpha(g, g_1 \cdot \xi), \alpha(g, g_1 \cdot \eta)],$$

d'où la formule

$$\text{ad}(g^{-1}) \omega([C(g_1 \cdot \xi), C(g_1 \cdot \eta)]_u) = \omega([C(\xi), C(\eta)]_{ug}).$$

On déduit du lemme la proposition suivante:

PROPOSITION IV.5

Soit Ω_t (resp. Ω_c) la forme de torsion (resp. la forme de courbure) de ω .

$$(i) \quad \Omega_t(C(\xi)_{ug}, C(\eta)_{ug}) \\ = g_1^{-1} \cdot \Omega_t(C(g_1 \cdot \xi)_u, C(g_1 \cdot \eta)_u),$$

$$\text{où } g_1 = \pi_1^t(g) \in L_n^1;$$

(ii) si la forme de torsion Ω_t est nulle,

$$\Omega_c(C(\xi)_{ug}, C(\eta)_{ug}) \\ = \text{ad}(g^{-1}) \Omega_c(C(g_1 \cdot \xi)_u, C(g_1 \cdot \eta)_u).$$

Soit $Q_u = \{C(\xi)_u\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ l'espace des vecteurs

horizontaux au point $u \in H_{G_k}(V_n)$. La restriction de la forme de torsion Ω_t à Q_u définit une application bilinéaire alternée t_u de $R^n \times R^n$ dans R^n , donnée par

$$t_u(\xi, \eta) = \Omega_t(C(\xi)_u, C(\eta)_u),$$

c'est-à-dire $t_u \in \text{Hom}(R^n \wedge R^n, R^n) \simeq R^n \otimes \Lambda^2(R^n)^*$.

Le groupe de Lie G_k opère sur $R^n \otimes \Lambda^2(R^n)^*$ par la représentation μ : si $g \in G_k$, $\mu(g) = g_1 \otimes \Lambda^2 g_1^{-1}$ avec $g_1 = \pi_1^k(g) \in L_n^1$. D'après le résultat précédent, l'application $u \longrightarrow t_u$ définit un tenseur t sur $H_{G_k}(V_n)$, c'est-à-dire

$$t_{ug} = \mu(g^{-1}) t_u.$$

Le tenseur t s'appelle tenseur de torsion de la connexion de Cartan ω . Si $g \in \text{Ker}(G_k \longrightarrow G_1)$, on a $t_{ug} = t_u$; le tenseur t est constant le long de chaque fibre de la fibration $H_{G_k}(V_n) \longrightarrow H_{G_1}(V_n)$. On déduit un tenseur sur l'espace fibré principal $H_{G_1}(V_n)$.

De même, la restriction de la forme de courbure Ω_c à Q_u détermine une application bilinéaire alternée κ_u de $R^n \times R^n$ dans $\mathcal{L}_k$; elle est donnée par

$$\kappa_u(\xi, \eta) = \Omega_c(C(\xi)_u, C(\eta)_u).$$

L'élément κ_u appartient à $\text{Hom}(R^n \wedge R^n, \mathcal{L}_k) \simeq \mathcal{L}_k \otimes \Lambda^2(R^n)^*$.

Le groupe de Lie G_k opère sur $\mathcal{L}_k \otimes \Lambda^2(R^n)^*$ par la représentation δ : si $g \in G_k$, $\delta(g) = \text{ad}(g) \otimes \Lambda^2 g_1^{-1}$ où $g_1 = \pi_1^k(g)$. Si la forme de torsion Ω_t est nulle,

l'application $u \longrightarrow \kappa_u$ définit un tenseur κ sur $H_{G_k}(V_n)$, c'est-à-dire

$$\kappa_{ug} = \delta(g^{-1}) \kappa_u.$$

Le tenseur κ s'appelle tenseur de courbure de ω .

3. G -connexions.

Considérons toujours une G -structure géométrique d'ordre k sur V_n définie par la suite $H_{G_1}(V_n), H_{G_2}(V_n), \dots, H_{G_k}(V_n)$. Une connexion de Cartan ω dans $H_{G_k}(V_n)$ s'appellera une G -connexion sur V_n si elle satisfait à la condition:

$$(*) \text{ si } X \in T_u(H_{G_k}(V_n)), \text{ alors } T\pi_0^k(\omega(X)) = \pi_1^k(u)^{-1} \{ T\pi_0^k(X) \}, \text{ où } \pi_0^k \text{ et } \pi_1^k \text{ sont les projections naturelles.}$$

THEOREME IV.6

Soit V_n une variété différentiable paracompacte munie d'une G -structure géométrique. Il existe des G -connexions sur V_n .

La démonstration peut se ramener à montrer l'existence de G -connexions locales sur V_n : en effet, supposons que, pour tout x de V_n , il existe un voisinage ouvert U_x de x et une G -connexion sur U_x . La variété V_n étant paracompacte, il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ localement fini sur V_n , de sorte que sur chaque ouvert

U_α il existe une G -connexion ω_α . Soit $\{f_\alpha\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. La forme différentielle $\omega = \sum_\alpha (f_\alpha \cdot \pi_\alpha^k) \omega_\alpha$ définit une G -connexion globale sur V_n . Ceci étant, on peut supposer que l'espace fibré principal $H_{G_k}(V_n)$ est trivial. Soit σ une section différentiable de V_n dans $H_{G_k}(V_n)$. Soit $u = \sigma(x)$, où $x \in V_n$; tout vecteur $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ s'écrit $X = T\sigma(Y) + (A^*)_{\bar{u}}$, où A^* est un champ de vecteurs fondamental et où $Y \in T_x(V_n)$. Posons $\omega(X) = \pi_1^k(u)^{-1}(Y) + A$. Si $Z \in T_{u'}(H_{G_k}(V_n))$, où $u' \notin \sigma(V_n)$, il existe un $g \in G_k$ et un X tangent à $H_{G_k}(V_n)$ au point $\sigma(\pi_0^k(u'))$ de sorte que $u' = \sigma(\pi_0^k(u'))g$ et que $Z = TR_g(X)$. Nous posons alors $\omega(Z) = \text{ad}(g^{-1})\omega(X)$. On vérifie que la forme ω ainsi définie détermine une G -connexion sur V_n .

Une G -connexion ω sur V_n sera dite normale si la forme ω possède de plus, la propriété suivante:
 $T\pi_{k-1}^k \circ \omega = \theta_k$, où θ_k est la forme canonique sur $H_{G_k}(V_n)$.

Etant donnée une G -structure géométrique sur V_n , il peut exister ou ne pas exister des G -connexions normales sur V_n . Considérons des conditions nécessaires pour l'existence d'une telle connexion. Soit donc ω une

$\mathbb{G}$ -connexion normale sur V_n . Pour tout vecteur $X \in T(H_{G_k}(V_n))$, nous avons $T\pi_{k-1}^k(\omega(TR_g(X))) = \theta_k(TR_g(X)) \cdot \rho(g^{-1})\theta_k(X)$, où ρ est la représentation linéaire de G_k sur $E_{G_{k-1}} = R^n \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$. D'autre part, $T\pi_{k-1}^k(\omega(TR_g(X))) = T\pi_{k-1}^k(\text{ad}(g^{-1})\omega(X))$. On déduit

$$T\pi_{k-1}^k(\text{ad}(g^{-1})\omega(X)) = \rho(g^{-1})\theta_k(X);$$

en particulier, si $X = C(\xi)_u$ (où $\xi \in R^n$) est un vecteur horizontal,

$$T\pi_{k-1}^k(\text{ad}(g^{-1})\cdot \xi) = \rho(g^{-1})\xi.$$

Il existe alors un relèvement σ de G_k dans $\bar{G}_k^{(1)}$ tel que $\text{ad}(g)\cdot \xi = \rho(\sigma(g))\cdot \xi$ quel que soit $\xi \in R^n$, où l'on note également ρ la représentation linéaire de $\bar{G}_k^{(1)}$ sur $E_{G_k} = R^n \oplus \mathfrak{g}_k$. Comme ρ est fidèle, le relèvement σ est unique et indépendant du choix de la $\mathbb{G}$ -connexion normale ω . D'ailleurs, σ est un homomorphisme de groupes de G_k dans $\bar{G}_k^{(1)}$.

Soit Q_u l'espace des vecteurs horizontaux de $H_{G_k}(V_n)$ au point u . La condition $T\pi_{k-1}^k \circ \omega = \theta_k$ entraîne que l'image de Q_u par π_{k-1}^k coïncide avec le n -plan horizontal $H_{G_{k-1}}^{(1)}$ associé au repère u . Par conséquent, il existe un relèvement φ de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$, de sorte que Q_u soit précisément le n -plan horizontal associé au relèvement $\varphi(u)$. La forme ω étant une 1-forme pseudo-tensorielle de type adjoint sur $H_{G_k}(V_n)$,

on déduit que le relèvement φ est compatible avec l'homomorphisme σ de G_k dans $\bar{G}_k^{(1)}$. Réciproquement, tout autre relèvement ψ de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ compatible avec l'homomorphisme σ définit une $\mathbb{G}$ -connexion normale $\omega = \psi^* \theta_{k+1}$ sur V_n . On énoncera :

THEOREME IV.7

Soit V_n une variété différentiable munie d'une $\mathbb{G}$ -structure géométrique normale. Soit σ l'homomorphisme de G_k dans $\bar{G}_k^{(1)}$ associé. Il existe une bijection entre les ensembles des $\mathbb{G}$ -connexions normales ω sur V_n et des relèvements φ de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ compatibles avec l'homomorphisme σ , la bijection étant donnée par

$$\omega = \varphi^* \theta_{k+1},$$

où θ_{k+1} est la forme canonique sur $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$.

COROLLAIRE IV.8

Toute $\mathbb{G}$ -connexion normale sur V_n est à torsion nulle.

En effet, soit ω une $\mathbb{G}$ -connexion normale sur V_n . Il existe un relèvement φ de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ compatible avec l'homomorphisme σ de sorte que

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi^* \theta_{k+1} \quad . \quad \text{On déduit} \quad d\omega = \varphi^* d\theta_{k+1} \quad \text{et} \\ T\pi_{k-2}^* \cdot d\omega &= T\pi_{k-2}^* \cdot d\theta_{k+1} \cdot T\varphi = T\pi_{k-2}^{k-1} \cdot d\theta_k \cdot T\pi_k^{k+1} \cdot T\varphi = \\ &T\pi_{k-2}^{k-1} \cdot d\theta_k \quad . \quad \text{Soit } Q_u \text{ l'espace des vecteurs horizontaux} \end{aligned}$$

de $H_{G_k}(V_n)$ au point u ; c'est le n -plan horizontal associé au repère $\varphi(u)$. La 2-forme $T\pi_{k-2}^{k-1} \cdot d\theta_k$ est nulle sur Q_u , car $T\pi_{k-2}^{k-1} \cdot d\theta_k = d(T\pi_{k-2}^{k-1} \cdot \theta_k) = d(\theta_{k-1} \cdot T\pi_{k-1}^k) = \pi_{k-1}^k * d\theta_{k-1}$ et la 2-forme $d\theta_{k-1}$ est nulle sur le n -plan $T\pi_{k-1}^k(Q_u)$ en vertu du théorème I.10. Par conséquent, la restriction de la forme $\Omega = d\omega \cdot h = d\omega + [\omega, \omega]$ à Q_u est à valeurs dans $\text{Ker}(E_{G_k} \rightarrow E_{G_{k-2}})$. Comme Ω est une 2-forme tensorielle sur $H_{G_k}(V_n)$, la forme de torsion Ω_t de la G -connexion ω est nulle, d'où le résultat.

THEOREME IV.9

Soit V_n une variété différentiable paracompacte munie d'une G -structure géométrique normale. Alors il existe des G -connexions normales sur V_n .

Les raisonnements employés dans la première partie de la démonstration du théorème IV.6 montrent qu'il suffit de prouver l'existence de G -connexions normales locales sur V_n . Soit x un point de V_n ; il est toujours possible de trouver un ouvert U_α contenant x et un relèvement local φ_α de $H_{G_k}(V_n)$ dans $\bar{H}_{G_k}^{(1)}(V_n)$ défini sur la partie de $H_{G_k}(V_n)$ située au-dessus de U_α , de sorte que φ_α est compatible avec l'homomorphisme $\sigma : G_k \longrightarrow \bar{G}_k^{(1)}$ associé à la G -structure géométrique

normale. D'après le théorème précédent, la forme locale $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \theta_{k+1}$ définit une G -connexion normale sur U_α , d'où le résultat.

Considérons la G -structure géométrique d'ordre k sur V_n donnée par la suite de sous-espaces fibrés principaux $H_{G_1}(V_n), H_{G_2}(V_n), \dots, H_{G_k}(V_n)$. La G_1 -structure du premier ordre $H_{G_1}(V_n)$ est $(k-1)$ -intégrable, car $H_{G_1}^{(k-1)}(V_n) = H_{G_1}^{(k-1)}(V_n) \cap H^k(V_n)$ est non vide; en effet, $H_{G_k}(V_n)$ est contenu dans $H_{G_1}^{(k-1)}(V_n)$. Soit φ une G_1 -connexion symétrique d'ordre $k-1$, c'est-à-dire une section invariante de $H^1(V_n)$ dans $H^k(V_n)$ telle que l'image de $H_{G_1}(V_n)$ par φ est contenue dans $H_{G_1}^{(k-1)}(V_n)$. Nous dirons que φ appartient à la G -structure géométrique donnée si φ applique $H_{G_1}(V_n)$ dans $H_{G_k}(V_n)$. Il existe donc une bijection entre les G_1 -connexions symétriques d'ordre $k-1$ appartenant à la G -structure géométrique donnée et les sous-espaces fibrés principaux de groupe structural G_1 de $H_{G_k}(V_n)$. Un tel sous-espace fibré principal est déterminé par une section de l'espace fibré $H_{G_k}(V_n)/G_1 \longrightarrow V_n$. La variété V_n étant paracompacte, et la fibre-type étant isomorphe à un espace numérique, il existe des sections de $H_{G_k}(V_n)/G_1 \longrightarrow V_n$. Il existe donc des G_1 -connexions symétriques d'ordre $k-1$

sur V_n appartenant à la G -structure géométrique donnée.

Le groupe de Lie G_k est produit semi-direct de G_1 et du sous-groupe $N = \text{Ker}(G_k \rightarrow G_1)$. Nous avons une décomposition $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathcal{N}$, où $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathcal{N}$) est l'algèbre de Lie de G_1 (resp. N). L'opération adjointe de G_1 sur $\mathfrak{g}^*$ laisse invariantes les composantes de $\mathfrak{g}^*$. Soit φ une G_1 -connexion symétrique d'ordre $k-1$ appartenant à la G -structure géométrique donnée; soit ω une G -connexion sur V_n . La forme différentielle $\varphi^*\omega$ induite sur $H_{G_1}(V_n)$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathcal{N}$. Les composantes de $\varphi^*\omega$ définissent trois formes différentielles sur $H_{G_1}(V_n)$:

- (i) La $\mathbb{R}^n$ -composante de $\varphi^*\omega$ coïncide avec la forme canonique θ_1 sur $H_{G_1}(V_n)$;
- (ii) La $\mathfrak{g}_1$ -composante de $\varphi^*\omega$ définit une connexion infinitésimale dans $H_{G_1}(V_n)$; elle sera notée ω_1 ;
- (iii) La $\mathcal{N}$ -composante de $\varphi^*\omega$ est une 1-forme tensorielle α sur $H_{G_1}(V_n)$, c'est-à-dire

$$\alpha(\text{TR}_g(X)) = \text{ad}(g^{-1})\alpha(X)$$
 pour tout $X \in T(H_{G_1}(V_n))$ et tout $g \in G_1$.

PROPOSITION IV.10

Etant donnée une G_1 -connexion symétrique φ d'ordre $k-1$ sur V_n appartenant à la G -structure géométrique donnée, il

existe une bijection entre les ensembles des $\mathfrak{G}$ -connexions ω sur V_n et des couples (ω_0, α) , où ω_0 est une connexion infinitésimale dans $H_{G_1}(V_n)$ et où α est une 1-forme tensorielle sur $H_{G_1}(V_n)$ à valeurs dans $\mathcal{N}$; la bijection est donnée par

$$\varphi^* \omega = \theta_1 + \omega_0 + \alpha .$$

Il reste à montrer qu'à chaque couple (ω_0, α) est associée une $\mathfrak{G}$ -connexion ω sur V_n de sorte que $\varphi^* \omega = \theta_1 + \omega_0 + \alpha$. Soit Q_y l'espace des vecteurs horizontaux de $H_{G_1}(V_n)$ au point y défini par la connexion infinitésimale ω_0 . Soit $u = \varphi(y)$. Nous avons une décomposition $T_u(H_{G_k}(V_n)) = T\varphi(Q_y) \oplus \mathcal{V}_u$, où $\mathcal{V}_u$ est l'espace des vecteurs verticaux de $H_{G_k}(V_n)$ au point u . Tout vecteur $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ se décompose : $X = T\varphi(Y) + (A^*)_u$, où $Y \in Q_y$ et où $A \in \mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathcal{N}$. Posons $\omega(X) = \theta_1(Y) + \alpha(Y) + A$. On déduit que $\omega(\text{TR}_g(X)) = \text{ad}(g^{-1}) \omega(X)$ pour tout $g \in G_1$. Pour un vecteur $Z \in T_v(H_{G_k}(V_n))$, où $v \in \varphi(H_{G_1}(V_n))$, il existe un $u \in \varphi(H_{G_1}(V_n))$ et un vecteur $X \in T_u(H_{G_k}(V_n))$ de sorte que $v = ug$ et $Z = \text{TR}_g(X)$, où $g \in G_k$. La valeur $\omega(Z) = \text{ad}(g^{-1}) \omega(X)$ ne dépend pas du choix de u et de X . La forme différentielle ω ainsi obtenue définit une $\mathfrak{G}$ -connexion sur V_n . Il est clair que $\varphi^* \omega = \theta_1 + \omega_0 + \alpha$.

Avec les notations de la proposition précédente, si Q_u est l'espace des vecteurs horizontaux de $H_{G_k}(V_n)$ associé à la G -connexion ω au point $u = \varphi(y)$, où $y \in H_{G_1}(V_n)$, et si π_1^k est la projection naturelle de $H_{G_k}(V_n)$ sur $H_{G_1}(V_n)$, nous avons $T\pi_1^k(Q_u) = Q_y$, espace des vecteurs horizontaux de $H_{G_1}(V_n)$ au point y . Si ω est une G -connexion normale, alors la connexion induite ω_0 coïncide avec celle définie par la G_1 -connexion symétrique d'ordre 1 : $\varphi_2 = \pi_2^k \circ \varphi$, d'où le corollaire:

COROLLAIRE IV.11

Avec les hypothèses de la proposition, et si de plus la G -structure géométrique sur V_n est normale, alors:

- (i) toute G -connexion normale sur V_n induit la même connexion infinitésimale ω dans $H_{G_1}(V_n)$;
- (ii) il y a une bijection entre les ensembles des G -connexions normales ω et des 1-formes tensorielles α sur $H_{G_1}(V_n)$ à valeurs dans $\mathcal{N}$; la bijection est donnée par

$$\varphi^*\omega = \theta_1 + \omega_0 + \alpha.$$

Un difféomorphisme f de V_n sur V_n s'appellera G -automorphisme si le difféomorphisme prolongé $f^{(k)}$ de $\bar{H}^{(k)}(V_n)$ sur $\bar{H}^{(k)}(V_n)$ laisse stable le sous-espace fibré principal $H_{G_k}(V_n)$. Il en résulte que, pour tout $m \leq k$, le difféomorphisme prolongé $f^{(m)}$ de $\bar{H}^{(m)}(V_n)$

sur $H^{(m)}(V_n)$ laisse stable le sous-espace fibré principal $H_{G_m}(V_n)$.

Soit ω une G -connexion sur V_n . Un G -automorphisme f de V_n s'appellera (ω, G) -automorphisme si la restriction de $f^{(k)}$ à $H_{G_k}(V_n)$ laisse invariante la forme de connexion de Cartan ω .

Considérons un automorphisme h de $H_{G_k}(V_n)$ tel que $h^*\omega = \omega$. Si ω est une G -connexion normale sur V_n et si le groupe de Lie G_k est connexe, nous avons $h \cdot R_g = R_g \cdot h$ pour tout $g \in G_k$ et $h^*\theta_k = \theta_k$. Par conséquent, il existe un automorphisme f de V_n tel que $h = f^{(k)}$. Il y a donc une bijection entre les ensembles des (ω, G) -automorphismes de V_n et des automorphismes de $H_{G_k}(V_n)$ qui laissent invariante la forme ω . Or, la forme ω définit un parallélisme absolu sur $H_{G_k}(V_n)$. D'après un théorème de Kobayashi [12a], le groupe des automorphismes laissant invariant un parallélisme absolu est un groupe de Lie. On énoncera:

THEOREME IV.12

Soit ω une G -connexion normale sur V_n . Le groupe des (ω, G) -automorphismes de V_n est un groupe de Lie.

Le groupe des (ω, G) -automorphismes de V_n est un sous-groupe du groupe des G -automorphismes de V_n .

Si la G -connexion normale ω est invariante par rapport à tout G -automorphisme de V_n , alors les deux groupes sont les mêmes, d'où le résultat:

THEOREME IV.13

Soit V_n une variété différentiable munie d'une G -structure géométrique normale. S'il existe une G -connexion normale sur V_n invariante par rapport à tout G -automorphisme de V_n , alors le groupe des G -automorphismes de V_n est un groupe de Lie.

CHAPITRE V

PROLONGEMENTS DE G-STRUCTURES AUX ESPACES DE PROLONGEMENTS

1. Rappels sur le foncteur T_p^r .

Soit V_n une variété différentiable réelle de classe C^∞ et de dimension finie n . Nous appelons p^r -vitesse dans V_n d'origine x un r -jet de R^p dans V_n de source $0 \in R^n$ et de but $x \in V_n$. L'ensemble $T_p^r(V_n)$ des p^r -vitesses dans V_n admet une structure d'espace fibré différentiable $T_p^r(V_n)(V_n, L_{n,p}^r, L_n^r, H^r(V_n))$ [6c]. D'après les propriétés de $T_p^r(V_n)$, on peut considérer T_p^r comme un foncteur covariant de la catégorie des applications différentiables entre variétés différentiables vers la catégorie des morphismes entre espaces fibrés différentiables.

Soit $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ une loi de composition interne différentiable sur une variété différentiable V_n , c'est-à-dire une application différentiable de $V_n \times V_n$ dans V_n ; son prolongement $T_p^r f$ est une application différentiable de $T_p^r(V_n) \times T_p^r(V_n)$ dans $T_p^r(V_n)$, c'est-à-dire une loi de composition différentiable sur $T_p^r(V_n)$; il est immédiat que, si f est associative (resp. commutative), il en est de même de $T_p^r f$. En particulier, si G est un groupe de Lie,

le prolongement de la loi de composition sur G fait de $T_p^r(G)$ un groupe de Lie.

Si le groupe de Lie G opère différentiablement et effectivement sur une variété différentiable F , alors $T_p^r(G)$ opère de la même manière sur $T_p^r(F)$ [36]. Si F est un espace vectoriel, $T_p^r(F)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel; si G opère linéairement sur F , il en est de même de $T_p^r(G)$ sur $T_p^r(F)$.

Le groupe de Lie L_n^1 opère linéairement et effectivement sur R^n ; par prolongement, le groupe $T_p^r(L_n^1)$ opère linéairement et effectivement sur l'espace vectoriel $T_p^r(R^n)$. Soit N la dimension de $T_p^r(R^n)$ sur le corps des réels. A toute identification $\nu: T_p^r(R^n) \simeq R^N$ est associé un homomorphisme injectif ν de $T_p^r(L_n^1)$ dans L_N^1 .

Si $E(X, F, G, H)$ est un espace fibré différentiable, en plus de la structure fibrée usuelle de base E , l'espace $T_p^r(E)$ admet encore une structure d'espace fibré différentiable de symbole $T_p^r(E)$ ($T_p^r(X), T_p^r(F), T_p^r(G), T_p^r(H)$) [36].

Etant donnée une suite exacte d'espaces fibrés vectoriels de base V_n :

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0,$$

la suite d'espaces fibrés vectoriels sur $T_p^r(V_n)$:

$$0 \longrightarrow T_p^r(E') \longrightarrow T_p^r(E) \longrightarrow T_p^r(E'') \longrightarrow 0$$

est exacte [23].

2. T_P^r -prolongement d'une connexion linéaire.

Nous désignerons par $P(V_n, G)$ un espace fibré principal de base V_n et de groupe structural G . Nous avons la suite exacte d'Atiyah [0]

$S(P): \quad 0 \longrightarrow K_P \longrightarrow Q_P \longrightarrow T_1^1(V_n) \longrightarrow 0$,
où $T_1^1(V_n)$ est l'espace fibré tangent de V_n , où Q_P est l'espace fibré vectoriel des champs de vecteurs sur P invariants par rapport aux translations à droite de G sur P et où K_P est le sous-espace fibré vectoriel de Q_P formé des champs de vecteurs verticaux invariants. La fibre-type de K_P est isomorphe à $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie de G , et K_P peut être considéré comme un espace fibré associé à P par la représentation adjointe de G sur la fibre-type $\mathfrak{g}$. Une connexion infinitésimale dans $P(V_n, G)$ peut se définir comme un scindage de la suite exacte $S(P)$. Dans le cas d'un espace fibré principal différentiable où la base est paracompacte, un tel scindage existe toujours.

Soit $H^1(V_n)(V_n, L_n^1)$ l'espace fibré principal des repères du premier ordre sur V_n . Pour l'espace fibré principal $T_P^r(H^1(V_n))(T_P^r(V_n), T_P^r(L_n^1))$ nous avons la suite exacte $S(T_P^r(H^1(V_n)):$

$$0 \longrightarrow K_{T_P^r(H^1(V_n))} \xrightarrow{\quad} Q_{T_P^r(H^1(V_n))} \xrightarrow{\quad} T_1^1(T_P^r(V_n)) \longrightarrow 0.$$

D'autre part, en appliquant le foncteur T_p^r à la suite exacte $S(H^1(V_n))$:

$0 \longrightarrow K_H^1(V_n) \longrightarrow Q_H^1(V_n) \longrightarrow T_1^1(V_n) \longrightarrow 0$,
nous obtenons une autre suite exacte d'espaces fibrés vectoriels de base $T_p^r(V_n)$, soit $T_p^r(S(H^1(V_n)))$:

$$0 \longrightarrow T_p^r(K_H^1(V_n)) \longrightarrow T_p^r(Q_H^1(V_n)) \longrightarrow T_p^r(T_1^1(V_n)) \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION V.1 [23]

L'homomorphisme injectif $\nu : T_p^r(L_N^1) \longrightarrow L_N^1$ induit un homomorphisme injectif de suites exactes d'espaces fibrés vectoriel $T_p^r(S(H^1(V_n))) \longrightarrow S(T_p^r(H^1(V_n)))$, c'est-à-dire on a un diagramme commutatif de la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_p^r(K_H^1(V_n)) & \longrightarrow & T_p^r(Q_H^1(V_n)) & \longrightarrow & T_p^r(T_1^1(V_n)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_{T_p^r(H^1(V_n))} & \longrightarrow & Q_{T_p^r(H^1(V_n))} & \longrightarrow & T_1^1(T_p^r(V_n)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La démonstration s'appuie sur les deux lemmes suivants qui se démontrent facilement à l'aide des coordonnées locales.

LEMME V.2

$T_p^r(T_1^1(V_n)) \longrightarrow T_1^1(T_p^r(V_n))$ est le morphisme bijectif d'espaces fibrés vectoriels de base $T_p^r(V_n)$, associé à l'homomorphisme injectif $\nu : T_p^r(L_N^1) \longrightarrow L_N^1$, où $N = \dim T_p^r(R^n)$.

LEMME V.3

Soit G un groupe de Lie. L'algèbre de Lie $\mathcal{T}_p^r(\mathfrak{g})$ de $T_p^r(G)$ est isomorphe à $T_p^r(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G .

En vertu des propriétés générales du foncteur T_p^r et du lemme V.3 nous avons

$$\begin{aligned} T_p^r(Q_H^1(V_n)) &= T_p^r(T_1^1(V_n)) \times_{T_p^r(L_n^1)} T_p^r(\mathcal{E}_n^1) \\ &= V_n \times_{T_p^r(L_n^1) \times T_p^r(L_n^1)} (T_p^r(R^n) \times T_p^r(\mathcal{E}_n^1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } Q_{T_p^r(H^1(V_n))} &= T_1^1(T_p^r(V_n)) \times_{T_p^r(L_n^1)} \mathcal{T}_p^r(\mathcal{E}_n^1) \\ &= V_n \times_{i_N^1 \times T_p^r(L_n^1)} (R^N \times \mathcal{T}_p^r(\mathcal{E}_n^1)), \end{aligned}$$

d'où par application du lemme V.2, l'injection cherchée.

Puisque toutes les fibres des espaces fibrés source et but des flèches verticales dans le diagramme précédent sont de même dimension, la restriction à chaque fibre des homomorphismes d'espaces fibrés vectoriels considérés est surjective. Il en résulte qu'à tout scindage de l'une des suites exactes précédentes correspond un seul scindage de l'autre, d'où le théorème:

THEOREME V.4 [23]

Toute connexion infinitésimale dans $H^1(V_n)(V_n, L_n^1)$, c'est-à-dire toute connexion linéaire du premier ordre sur V_n , induit une connexion infinitésimale dans l'espace fibré principal $T_p^r(H^1(V_n))(T_p^r(V_n), T_p^r(L_n^1))$.

La connexion infinitésimale induite s'appellera T_p^r -prolongement de la connexion linéaire sur V_n .

3. Représentation de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$.

Rappelons qu'à toute identification $\nu_0 : T_p^r(R^N) \simeq R^N$, où $N = \dim T_p^r(R^N)$, est associée une injection ν de $T_p^r(L_n^1)$ dans L_n^1 . Soit λ l'homomorphisme bijectif de $T_p^r(T_1^1(V_n))$ sur $T_1^1(T_p^r(V_n))$ défini dans le lemme V.2. Comme $T_p^r(H^1(V_n))$ est équivalent à l'espace fibré principal associé à $T_p^r(T_1^1(V_n))$, un élément z de $T_p^r(H^1(V_n))$ peut être considéré comme un isomorphisme de $T_p^r(R^N)$ sur la fibre $T_p^r(T_1^1(V_n))_y$, où y est la projection de z sur $T_p^r(V_n)$. L'application composée $\lambda \circ z \circ \nu_0^{-1}$ est un isomorphisme linéaire de R^N sur la fibre $T_1^1(T_p^r(V_n))_y$; elle détermine donc un élément de $H^1(T_p^r(V_n))$. En posant $k(z) = \lambda \circ z \circ \nu_0^{-1}$ nous obtenons une injection de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$ compatible avec l'homomorphisme ν . On énoncera:

THEOREME V.5

Il existe une injection κ de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans
 $H^1(T_p^r(V_n))$ compatible avec l'homomorphisme injectif
 ν de $T_p^r(L_n^1)$ dans L_N^1 .

En vertu de cette représentation de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$, on déduit du théorème V.4 le résultat suivant:

THEOREME V.6

Toute connexion linéaire sur V_n induit une connexion
linéaire sur $T_p^r(V_n)$.

Soit f un difféomorphisme de V_n sur V'_n . Il se prolonge en un difféomorphisme $f^{(1)}$ de $H^1(V_n)$ sur $H^1(V'_n)$. En appliquant le foncteur T_p^r , nous obtenons un isomorphisme $T_p^r(f^{(1)})$ d'espaces fibrés de $T_p^r(H^1(V_n))$ sur $T_p^r(H^1(V'_n))$. D'autre part, nous avons aussi un difféomorphisme $T_p^r f$ de $T_p^r(V_n)$ sur $T_p^r(V'_n)$, qui à son tour induit un isomorphisme $(T_p^r f)^{(1)}$ d'espaces fibrés principaux de $H^1(T_p^r(V_n))$ sur $H^1(T_p^r(V'_n))$. Soit κ (resp. κ') la représentation de $T_p^r(H^1(V_n))$ (resp. $T_p^r(H^1(V'_n))$) dans $H^1(T_p^r(V_n))$ (resp. $H^1(T_p^r(V'_n))$). D'après la définition même de κ et κ' , nous avons la propriété:

PROPOSITION V.7

Soit f un difféomorphisme de V_n sur V'_n . Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p^r(H^1(V_n)) & \xrightarrow{\kappa} & H^1(T_p^r(V_n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_p^r(H^1(V'_n)) & \xrightarrow{\kappa'} & H^1(T_p^r(V'_n))
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des difféomorphismes induits.

4. T_p^r -prolongements de G -structure.

Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Nous désignerons par $\hat{G}$ l'image de $T_n^r(G)$ par l'homomorphisme injectif $\nu : T_p^r(L_n^1) \longrightarrow L_N^1$. Le groupe $\hat{G}$ est un sous-groupe de L_N^1 .

Considérons une G -structure P sur V_n , où P est un sous-espace fibré principal de groupe structural G de $H^1(V_n)$. Le prolongement $T_p^r(P)$ est un sous-espace fibré principal de groupe structural $T_p^r(G)$ de $T_p^r(H^1(V_n))$. L'image de $T_p^r(P)$ par la représentation κ de $T_p^r(H^1(V_n))$ dans $H^1(T_p^r(V_n))$ définit une $\hat{G}$ -structure sur $T_p^r(V_n)$. On énoncera

THEOREME V.8

Toute G-structure sur V_n induit une $\hat{G}$ -structure sur $T_p^r(V_n)$.

Si P est une G-structure sur V_n , nous désignerons par $\hat{P} = \kappa(T_p^r(P))$ la $\hat{G}$ -structure sur $T_p^r(V_n)$ induite par P . La $\hat{G}$ -structure $\hat{P}$ sur $T_p^r(V_n)$ s'appellera T_p^r -prolongement de P .

COROLLAIRE V.9

Si la variété V_n est complètement parallélisable, il en est de même de l'espace $T_p^r(V_n)$ des p^r -vitesses dans V_n .

En effet, si V_n est complètement parallélisable, il existe une G-structure sur V_n , où $G = \{e\}$ est le sous-groupe trivial de L_n^1 . Le T_p^r -prolongement est une $\hat{G}$ -structure sur $T_p^r(V_n)$. Comme $\hat{G} = \{e\}$, il existe un parallélisme absolu sur $T_p^r(V_n)$, d'où le corollaire.

Soit P (resp. P') une G-structure sur V_n (resp. V'_n). Un difféomorphisme f de V_n sur V'_n s'appellera un isomorphisme (ou une équivalence) de P sur P' si le difféomorphisme prolongé $f^{(1)}$ de $H^1(V_n)$ sur $H^1(V'_n)$ applique P sur P' ; et nous dirons que P est équivalente à P' .

THEOREME V.10

Soit P (resp. P') une G -structure sur V_n (resp. V'_n). Un difféomorphisme f de V_n sur V'_n est un isomorphisme de P sur P' si et seulement si $T_p^r f$ est un isomorphisme de $\hat{P}$ sur $\hat{P}'$.

Supposons que f est un isomorphisme de P sur P' . Nous avons $f^{(1)}(P) = P'$. Par conséquent,

$$\kappa' \{ T_p^r (f^{(1)}) (T_p^r(P)) \} = \kappa' (T_p^r(P')) = \hat{P}'.$$

Il en résulte que $(T_p^r f)^{(1)}(\hat{P}) = \hat{P}'$ en vertu de la proposition V.7, c'est-à-dire $T_p^r f$ est un isomorphisme de $\hat{P}$ sur $\hat{P}'$. Inversement, si $T_p^r f$ est un isomorphisme de $\hat{P}$ sur $\hat{P}'$, nous avons $\kappa' (T_p^r(P')) = \hat{P}' = (T_p^r f)^{(1)}(\hat{P}) = (T_p^r f)^{(1)}(\kappa' (T_p^r(P))) = \kappa' (T_p^r (f^{(1)}) (T_p^r(P)))$. Comme κ' est une injection, on déduit que $T_p^r(P') = T_p^r (f^{(1)}) (T_p^r(P))$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_p^r(H^1(V_n)) & \xrightarrow{T_p^r(f^{(1)})} & T_p^r(H^1(V'_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(V_n) & \xrightarrow{f^{(1)}} & H^1(V'_n) \end{array}$$

entraîne que $f^{(1)}(P) = P'$, c'est-à-dire f est un isomorphisme de P sur P' .

COROLLAIRE V.11

Soit P une G -structure sur V_n . Une transformation f de V_n est un automorphisme de P si et seulement si $T_p^r f$ est un automorphisme de $\hat{P}$.

Deux G -structures sont équivalentes si et seulement si leurs T_p^r -prolongements sont équivalents. Rappelons qu'une G -structure P sur V_n est intégrable si P est localement équivalente à la G -structure canonique $H_G(R^n) = R^n \times G$ sur R^n . Or, le T_p^r -prolongement de $H_G(R^n)$ étant équivalent à $H_{\hat{G}}(R^N) = R^N \times \hat{G}$, où $N = \dim T_p^r(R^n)$, nous avons le résultat suivant:

THEOREME V.12

Le T_p^r -prolongement d'une G -structure intégrable est intégrable.

En effet, si une G -structure P sur V_n est intégrable, pour tout point x de V_n , il existe un voisinage ouvert U de x dans V_n et un difféomorphisme local f de U sur un voisinage ouvert W de $0 \in R^n$, de sorte que $f^{(1)}$ envoie la partie de P au-dessus de U sur la partie de $H_G(R^n)$ au-dessus de W , c'est-à-dire f est un isomorphisme local de P dans $H_G(R^n)$. D'après le résultat précédent, $T_p^r f$ est un isomorphisme local de $\hat{P}$ dans $\widehat{H_G(R^n)}$. Comme $\widehat{H_G(R^n)}$ est équivalente à la $\hat{G}$ -structure canonique $H_{\hat{G}}(R^N) =$

$R^N \times \hat{G}$ sur R^N , on conclut que $\hat{P}$ est intégrable.

Pour le cas où $p = 1$ et $r = 1$, on retrouve les résultats de Morimoto [20]. Dans ce cas particulier, Morimoto a montré que, si le T_1^1 -prolongement d'une G-structure est intégrable, alors la G-structure donnée au départ est intégrable.

5. Quelques applications.

(A) Considérons un automorphisme linéaire J de $R^n = R^{2m}$ tel que $J^2 = -1$. Nous désignerons par $GL(m, C)$ ou plus précisément par $GL(m, C; J)$ le sous-groupe de $L_n^1 = GL(n, R)$ formé des éléments g tels que $g \cdot J = J \cdot g$.

LEMME V.13

L'application $T_p^r J$ est un automorphisme linéaire
de l'espace vectoriel $T_p^r(R^n)$ et $(T_p^r J)^2 = -1$.

Comme $J \in L_n^1$, l'automorphisme linéaire $T_p^r J$ est un élément de $T_p^r(L_n^1)$. Nous désignerons par $\hat{J}$ l'image de $T_p^r J$ par $\nu : T_p^r(L_n^1) \longrightarrow L_N^1$, où $N = \dim T_p^r(R^n)$.

PROPOSITION V.14

Soit $G = GL(m, C; J)$. Alors $\hat{G} \subset GL(M, C; \hat{J})$,
où $2M = N = \dim T_p^r(R^n)$ et $2m = n$.

En effet, si $\hat{g} \in \hat{G}$, il existe un élément unique $A \in T_p^r(G)$ tel que $\nu(A) = \hat{g}$. Il suffit de montrer que A commute avec l'automorphisme linéaire $T_p^r J$. Soit $X = j_0^r f$ un élément arbitraire de $T_p^r(R^n)$. Si $A = j_0^r h$, où h est une application différentiable de R^p dans $G = GL(m, C; J)$, alors $(T_p^r J \circ A)(X) = j_0^r (J \cdot (h \cdot f)) = j_0^r (h \cdot (J \cdot f)) = (A \circ T_p^r J)(X)$, d'où la commutativité : $A \circ T_p^r J = T_p^r J \circ A$.

THEOREME V.15

(i) Toute structure presque complexe sur V_n (où n est pair) induit une structure presque complexe sur $T_p^r(V_n)$;

(ii) Si V_n est une variété complexe, alors $T_p^r(V_n)$ est muni d'une structure complexe.

On sait qu'il existe une bijection entre les ensembles des structures presque complexes sur V_n et des G -structures sur V_n , où G est le groupe $GL(m, C; J)$. Dans cette correspondance, une G -structure est intégrable si et seulement si la structure presque complexe correspondante est une structure complexe. Soit donnée une structure presque complexe sur V_n et soit P la G -structure correspondante, où $G = GL(m, C; J)$. La G -structure P induit une $\hat{G}$ -structure $\hat{P}$ sur $T_p^r(V_n)$. Puisque $\hat{G}$ est contenu dans $GL(M, C; \hat{J})$,

où $2M = N = \dim T_p^r(R^n)$, la $\hat{G}$ -structure $\hat{P}$ induit d'une façon naturelle une $GL(M, \mathbb{C}; \hat{J})$ -structure sur $T_p^r(V_n)$. On obtient ainsi une structure presque complexe sur $T_p^r(V_n)$. Si V_n est une variété complexe, la G -structure P correspondante est intégrable. D'après le théorème V.12, son T_p^r -prolongement $\hat{P}$ est intégrable. Par conséquent, la structure presque complexe induite par $\hat{P}$ est une structure complexe.

(B) Soit $R^n = W_1 \oplus W_2$, somme directe de deux sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 . Soit $G = GL(R^n; W_1, W_2)$ le sous-groupe de $L_n^1 = GL(n, \mathbb{R})$ formé des éléments qui laissent stables les composantes W_1 et W_2 de R^n . On a immédiatement

LEMME V.16

Soit $G = GL(R^n; W_1, W_2)$. Alors le groupe de Lie $T_p^r(G)$ est contenu dans $GL(T_p^r(R^n); T_p^r(W_1), T_p^r(W_2))$.

Puisque $T_p^r(R^n) \simeq R^N$, où $N = \dim T_p^r(R^n)$, on a $R^N = \hat{W}_1 \oplus \hat{W}_2$, où $\hat{W}_i$ est l'image de $T_p^r(W_i)$ ($i = 1, 2$) par cette identification. Par conséquent,

$$\hat{G} \subset GL(R^N; \hat{W}_1, \hat{W}_2).$$

THEOREME V.17

- (i) Toute structure presque produit sur V_n induit une structure presque produit sur $T_p^r(V_n)$;
- (ii) Si la structure presque produit sur V_n est intégrable, il en est de même de la structure induite sur $T_p^r(V_n)$.

Il y a une correspondance biunivoque entre les structures presque produits sur V_n et les G -structures sur V_n , où $G = GL(R^N; W_1, W_2)$. Dans cette correspondance, une structure presque produit est intégrable si et seulement si la G -structure correspondante est intégrable. La preuve se fait d'une façon analogue à celle du théorème précédent.

6. Points proches de "et".

On appellera " algèbre locale de rang m " toute algèbre associative et commutative $A = R \oplus I$ de dimension finie sur le corps des réels R telle que l'unique idéal maximal I satisfait aux conditions: $I^m \neq 0$ et $I^{m+1} = 0$. Si $a \in A$, le scalaire a_0 défini par $a \equiv a_0$ modulo I s'appelle la partie finie de a .

Soit V_n une variété différentiable réelle de classe C^∞ . Nous désignerons par $D(V_n)$ l'algèbre des fonctions numériques différentiables sur V_n . Soit x un point de V_n ; soit $I(x)$ l'idéal maximal de $D(V_n)$ formé des fonctions nulles en x ; alors l'algèbre quotient $D^{(m)}(V_n; x) = D(V_n)/I(x)^{m+1}$

est une algèbre locale de rang m isomorphe à $R_n^{(m)}$:

l'algèbre des séries formelles à n indéterminées, sans terme constant et tronquées à l'ordre $m+1$.

Soit A une algèbre locale. On appellera A-point de V_n proche de x , ou point proche d'espèce A sur V_n tout homomorphisme de $D(V_n)$ dans A tel que la partie finie de l'image de $f \in D(V_n)$ soit $f(x)$.

Si f est une application différentiable d'une variété V_n dans une variété W_p , l'application $g \rightarrow g \cdot f$ définit un homomorphisme de $D(W_p)$ dans $D(V_n)$; composant celui-ci avec l'homomorphisme de $D(V_n)$ dans A qui définit un A-point x' de V_n proche de $x \in V_n$, on obtient un A-point de W_p proche de $f(x) \in W_p$. qu'on notera ${}^A f(x')$.

On définit d'une façon naturelle une structure d'espace fibré différentiable de base V_n sur l'ensemble des A-points de V_n proches des points de V_n : muni de la structure de variété différentiable, l'ensemble s'appellera A-prolongement de V_n et se notera ${}^A(V_n)$. Si V_n et W_p sont des variétés différentiables, on vérifie que ${}^A(V_n \times W_p) = {}^A(V_n) \times {}^A(W_p)$. L'application ${}^A f$ associée à une application différentiable f de V_n dans W_p , définit une application différentiable de ${}^A(V_n)$ dans ${}^A(W_p)$. L'application qui associe à toute variété différentiable V_n son

A-prolongement $A(V_n)$ et à toute application différentiable f de V_n dans W_p son A-prolongement Af définit un foncteur covariant de la catégorie des applications différentiables entre variétés différentiables vers la catégorie des morphismes entre espaces fibrés différentiables.

Soit G un groupe de Lie. Le prolongement à A_G de la loi de composition sur G fait de A_G un groupe de Lie. Pour la droite numérique R , son prolongement A_R est muni d'une structure d'algèbre et s'identifie canoniquement avec l'algèbre A .

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur R . Le prolongement à A_E de l'addition des vecteurs dans E détermine sur A_E une structure de groupe abélien; d'autre part, on peut prolonger à

$$A(R \times E) = A_R \times A_E \simeq A \times A_E$$

l'application de $R \times E$ dans E . On définit ainsi une structure de A -module sur A_E qu'on peut identifier canoniquement avec le produit tensoriel $A \otimes E$ considéré comme A -modules. Si de plus on s'est donné sur E une multiplication qui fasse de E une algèbre commutative sur R , le prolongement de cette loi à A_E détermine sur A_E , avec les lois précédentes, une structure d'algèbre sur A pour laquelle A_E s'identifie encore canoniquement avec $A \otimes E$ muni de la structure correspondante.

THEOREME V.18 (Weil)

Soient A et B deux algèbres locales, V_n une variété différentiable. Il existe un isomorphisme canonique entre le $(A \otimes B)$ -prolongement de V_n et le A-prolongement du B-prolongement de V_n .

Soit en effet $f \in D(V_n)$; f se prolonge en une application ${}^B f$ de ${}^B(V_n)$ dans ${}^B R = B$, puis celle-ci en une application ${}^A({}^B f)$ de ${}^A({}^B(V_n))$ dans ${}^A B = A \otimes B$; si $x'' \in {}^A({}^B(V_n))$, ${}^A({}^B f)(x'')$ est donc un élément de $A \otimes B$. Remontant aux définitions, on voit que, si x'' est donné, $f \longrightarrow {}^A({}^B f)(x'')$ est un homomorphisme de $D(V_n)$ dans $A \otimes B$; de plus, si x'' est proche de $x' \in {}^B(V_n)$ et x' proche de $x \in V_n$, la partie finie de ${}^A({}^B f)(x'')$, considérée comme élément de l'algèbre locale $A \otimes B$, est $f(x')$; l'homomorphisme en question définit donc un $(A \otimes B)$ -point z' proche de x sur V_n ; et $x'' \rightarrow z'$ est une application canonique de ${}^A({}^B(V_n))$ dans le $(A \otimes B)$ -prolongement de V_n . Il reste à montrer que cette application est un isomorphisme de la première variété sur la seconde; comme c'est là une propriété purement locale par rapport à la base V_n , il suffit de la vérifier lorsque V_n est une partie ouverte d'un espace vectoriel E ; mais, en ce cas, elle résulte immédiatement des isomorphismes précédemment établis

entre $A(B(E))$ et $A \otimes (B \otimes E)$, d'une part, et entre le $(A \otimes B)$ -prolongement de E et $(A \otimes B) \otimes E$, d'autre part, et de l'associativité du produit tensoriel.

COROLLAIRE V.19

Soit f une application différentiable d'une variété V_n dans une variété W_p . Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A(B(V_n)) & \xrightarrow{A(B_f)} & A(B(W_p)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes B(V_n) & \xrightarrow{A \otimes B_f} & A \otimes B(W_p) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes canoniques.

A et B sont des algèbres associatives et commutatives sur le corps des réels R ; l'isomorphisme canonique de $A \otimes B$ sur $B \otimes A$ induit, pour toute V_n , un isomorphisme canonique de $A \otimes B(V_n)$ sur $B \otimes A(V_n)$. D'après le théorème précédent sur le transitivité des prolongements, il existe un isomorphisme canonique de $A(B(V_n))$ sur $B(A(V_n))$.

Soit f une application différentiable d'une variété V_n dans une autre W_p . De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B(V_n) & \xrightarrow{A \otimes B_f} & A \otimes B(W_p) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B \otimes A(V_n) & \xrightarrow{B \otimes A_f} & B \otimes A(W_p)
 \end{array}$$

on déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE V.20

Soit f une application différentiable de V_n dans W_p . Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 A(B(V_n)) & \xrightarrow{A(B_f)} & A(B(W_p)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(A(V_n)) & \xrightarrow{B(A_f)} & B(A(W_p))
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes canoniques.

7. Représentation de $A^{-1}(V_n)$ dans $A^{-1}(A(V_n))$.

Considérons un groupe de transformations G sur V_n .
 Le prolongement de l'application différentiable de $G \times V_n$ dans V_n fait de A_G un groupe de transformations sur $A(V_n)$.
 Si G opère linéairement sur un espace vectoriel E , alors les opérations de A_G sur A_E sont A -linéaires, car A_E est muni d'une structure de A -module.

On démontre à l'aide de cartes locales le résultat suivant:

PROPOSITION V.21

Soit E un espace fibré différentiable de symbole
E (X, F, G, H). Si le A-prolongement A_G opère effective-
ment sur A_F , l'espace A_E admet une structure d'espace
fibré différentiable de symbole $A_E(A_X, A_F, A_G, A_H)$.

Soit $L_n^1 = GL(n, R)$. Le groupe de Lie $A(L_n^1)$ opère
A-linéairement sur le A-module $A(R^n) = A \otimes R^n$. Comme
R est un sous-espace de $A = R \oplus I$, $A(R^n)$ est un
espace vectoriel sur R, sur lequel opère linéairement
le groupe de Lie $A(L_n^1)$. Désormais nous ne considérons
que des algèbres locales A telles que $A(L_n^1)$ opère
effectivement sur $A(R^n)$. A toute identification

$\mu_* : A(R^n) \simeq R^N$, où N est la dimension de l'espace
vectoriel $A(R^n)$ sur le corps des réels R, est associé
un homomorphisme injectif μ de $A(L_n^1)$ dans $L_N^1 =$
 $GL(N, R)$.

Considérons " l'algèbre des nombres duaux " $T = R \oplus I_0$,
où I_0 est de dimension 1, engendré par un élément τ
satisfaisant à la condition : $\tau^2 = 0$. La notion de
T-point de V_n proche de x est identique à la notion de
vecteur tangent à V_n en x. En tenant compte du théorème
de transitivité des prolongements et du corollaire V.20,
nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION V.22

(i) Il existe un morphisme bijectif d'espaces fibrés vectoriels de base $A(V_n)$:

$$\lambda : A(T(V_n)) \longrightarrow T(A(V_n))$$

associé à l'homomorphisme injectif μ de $A(L_n^1)$ dans L_N^1 ;

(ii) Si f est un difféomorphisme de V_n sur V'_n ,
le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A(T(V_n)) & \xrightarrow{A(T_f)} & A(T(V'_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(A(V_n)) & \xrightarrow{T(A_f)} & T(A(V'_n)) \end{array}$$

est commutatif.

Soit $H^1(V_n)$ l'espace fibré principal des repères du premier ordre sur V_n . Son prolongement $A(H^1(V_n))$ est un espace fibré principal de base $A(V_n)$ et de groupe structural $A(L_n^1)$. L'espace fibré tangent $T(V_n)$ est un espace fibré vectoriel associé à $H^1(V_n)$. D'après la proposition V.21, un élément z de $A(H^1(V_n))$ peut être considéré comme un isomorphisme linéaire de $A(T(R^n))$ sur la fibre $A(T(V_n))_y$, où y est la projection de z sur $A(V_n)$. Soit λ le morphisme bijectif de $A(T(V_n))$ sur $T(A(V_n))$ défini dans la proposition précédente.

L'application composée $\lambda \cdot z \cdot \mu_0^{-1}$ (où $\mu_0: A(T(R^n)) \simeq T(A(R^n)) \simeq R^N$) définit un isomorphisme linéaire de R^N sur la fibre $T(A(V_n))_y$. En posant $\alpha(z) = \lambda \cdot z \cdot \mu_0^{-1}$, nous obtenons ainsi une injection α de $A(H^1(V_n))$ dans $H^1(A(V_n))$ compatible avec l'homomorphisme injectif μ de $A(L_n^1)$ dans L_N^1 associé à μ_0 . On énoncera

THEOREME V.23

(i) Il existe une injection α de $A(H^1(V_n))$ dans $H^1(A(V_n))$ compatible avec l'homomorphisme injectif μ de $A(L_n^1)$ dans L_N^1 , où N est la dimension de l'espace vectoriel $A(R^n)$ sur R ;

(ii) Soit f un difféomorphisme de V_n sur V'_n .

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A(H^1(V_n)) & \xrightarrow{A(f^{(1)})} & A(H^1(V'_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(A(V_n)) & \xrightarrow{(Af)^{(1)}} & H^1(A(V'_n)) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections définies dans (i).

8. A-prolongement d'une τ -structure.

Soit G un sous-groupe de Lie de L_n^1 . Nous désignerons par $\check{G}$ l'image de A_G par l'homomorphisme

injectif $\mu : A(L_N^1) \longrightarrow L_N^1$. Le groupe $\check{G}$ est un sous-groupe de L_N^1 .

Considérons un sous-espace fibré principal P de groupe structural G de $H^1(V_n)$. Son A -prolongement A_P est un sous-espace fibré principal de $A(H^1(V_n))$. L'image de A_P par $\alpha : A(H^1(V_n)) \longrightarrow H^1(A(V_n))$ définit une $\check{G}$ -structure sur $A(V_n)$. On énoncera :

THEOREME V.24

Toute G -structure sur V_n induit une $\check{G}$ -structure sur $A(V_n)$.

Si P est une G -structure sur V_n , nous désignerons par $\check{P} = \alpha(A(P))$ la $\check{G}$ -structure sur $A(V_n)$ induite par P . La $\check{G}$ -structure $\check{P}$ sur $A(V_n)$ s'appellera A -prolongement de P .

COROLLAIRE V.25

Si V_n est complètement parallélisable, il en est de même de son A -prolongement $A(V_n)$.

En effet, si V_n est complètement parallélisable, il existe une G -structure sur V_n , où $G = \{e\}$ est le sous-groupe trivial de L_N^1 . Son A -prolongement est une $\check{G}$ -structure sur $A(V_n)$. Or, $\check{G} = \{e\}$, il existe un parallélisme absolu sur $A(V_n)$, d'où le corollaire.

Des raisonnements analogues à ceux employés dans les T_p^r -prolongements de G-structures donnent les résultats suivants:

PROPOSITION V.26

Soient P et P' des G-structures sur V_n et V'_n respectivement. Un difféomorphisme f de V_n sur V'_n est un isomorphisme de P sur P' si et seulement si A_f est un isomorphisme de $\check{P}$ sur $\check{P}'$.

THEOREME V.27

Le A-prolongement d'une G-structure intégrable est intégrable.

Comme applications, nous avons les résultats suivants dont la démonstration est analogue à celle des théorèmes V.15 et V.17.

THEOREME V.28

- (i) Toute structure presque complexe sur V_n (où n est pair) induit une structure presque complexe sur $A(V_n)$;
- (ii) Si V_n est une variété complexe, $A(V_n)$ est muni d'une structure de variété complexe.

THEOREME V.29

Si V_n est une variété différentiable à structure presque produit (resp. intégrable), alors il existe une structure presque produit (resp. intégrable) sur $A(V_n)$.

REMARQUE:

Dans la théorie des points proches de Weil, si l'on se borne à la seule considération des algèbres locales isomorphes à des algèbres $R_n^{(m)}$, on obtient des jets de Ehresmann.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] ATIYAH, M.F. Analytic complex connections in
fibre bundles,
Trans. A.M.S. 85(1957), p.181.
- [1] BASTIANI, A. Applications différentiables et
variétés différentiables de dimension
infinie,
J. Analyse Math. 13(1964), p.1.
- [2] BERNARD, D. Sur la géométrie différentielle
des G-structures,
Ann. Inst. Fourier 10(1960), p.151.
- [3] CARTAN, E. (a) Les espaces à connexion conforme,
Ann. Soc. Pol. Math. 2(1923), p.171.
 (b) Sur les variétés à connexion projective,
Bull. Soc. Math. France 52(1924), p.205.
- [4] CHEVALLEY, C. Theory of Lie groups,
Princeton University Press (1964).
- [5] CHERN, S.S. Pseudogroupes continus infinis,
Colloque de Géométrie Différentielle,
Strasbourg (1953), p.119.
- [6] EHRESMANN, C. (a) Sur la théorie des espaces fibrés,
Colloque de Topologie Algébrique,
Paris (1947), p.3.

- (b) Les connexions infinitésimales dans
un espace fibré différentiable,
Colloque de Topologie, Bruxelles (1950).
- (c) Les prolongements d'une variété
différentiable,
C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), p.598;
p.777; p.1081 ; " id." 234 (1952) p.1028;
p.1424 .
- (d) Structures locales et structures
infinitésimales,
C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), p.587 .
- (e) Introduction à la théorie des structures
infinitésimales et des pseudogroupes
de Lie ,
Colloque de Géométrie Différentielle,
Strasbourg (1953), p.97 .
- (f) Structures locales,
Ann. Mat. Pura Appl. 36 (1954), p.133 .
- (g) Extension du calcul des jets aux jets
non holonomes,
C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954), p.1762 .
- (h) Application de la notion de jet non
holonome,
C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), p.397 .

- (i) Les prolongements d'un espace fibré différentiable,
C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), p.1755.
- (j) Sur les connexions d'ordre supérieur,
Atti del V^o Congresso del Unione Mat.
Ital. (1956), p.326.
- (k) Sur les pseudogroupes de Lie de type fini,
C. R. Acad. Sci. Paris 246(1958), p.360.
- (l) Catégories topologiques et catégories différentiables,
Colloque de Géométrie Différentielle Globale, Bruxelles (1958), p.137.
- (m) Prolongements des catégories différentiables,
Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle 6 (1964).
- (n) Propriétés infinitésimales des catégories différentiables,
Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle 9 (1966).
- (o) Catégories topologiques,
Proc. Neder. Akad. Amsterdam 69 (1966), p.133.

- (p) Sur les catégories différentiables,
Atti del Convegno Internazionale di
Geometria Differenziale, Bologna (1967).
- [7] FUJIMOTO, A. (a) On the structure tensor of G-structure
Memoir Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A
18 (1960), p.157.
(b) On automorphismes of G-structures,
J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961), p.1.
(c) Conformal geometry of G-structures,
Tensor (N.S.) 15 (1964), p.181.
- [8] GOETZ, A. (a) A general scheme of inducing infinitesimal
connections in principal bundles,
Bull. Acad. Polon. Sci. 10 (1962), p.29.
(b) Special connections associated with
a given linear connection,
Bull. Acad. Polon. Sci. 10 (1962), p.277.
- [9] GUILLEMIN, V. The integrability problem for G-structures,
Trans. A.M.S. 116 (1965), p.544.
- [10] GUILLEMIN, V. & STERNBERG, S.
(a) An algebraic model of transitive
differential geometry,
Bull. A.M.S. 70 (1964), p.16.
(b) Deformation theory of pseudogroup
structures,
Memoirs A.M.S. * 64 (1966).

- [11] HERMANN, R. Cartan connections and the equivalence
 problem for geometric structures,
 Contributions to Differential Equations
 vol III (1964), p.199 .
- [12] KOBAYASHI, S (a) Le groupe de transformations qui laissent
 invariant un parallélisme,
 Colloque de Topologie, Strasbourg(1954) .
 (b) Theory of connections ,
 Ann. di Mat. 43 (1957), p.119 .
 (c) Canonical forms on frame bundles of
 higher order,
 Proceedings of Symposia in Pure Math.
 vol III A.M.S. (1961), p.186 .
- [13] KOBAYASHI, S. & NAGANO, T.
 On projective connections,
 J. Math. Mech. 13 (1964), p.215 .
- [14] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K.
 Foundations of differential geometry
 vol I & II ,
 Interscience, New York (1963) .
- [15] KOSZUL, J.L. Fibre bundles and differential geometry,
 Institute of Fundamental Research,
 Bombay (1960) .

- [16] LIBERMANN, P. (a) Sur le problème d'équivalence de
certaines structures infinitésimales,
Ann. Math. Pura Appl. 36 (1954), p.27.
- (b) Pseudogroupes infinitésimaux,
C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), p.1365.
- (c) Calcul tensoriel et connexions d'ordre
supérieur,
Anais Acad. Brasileira Ciências 37 (1965),
p.17.
- (d) Sur la géométrie des prolongements des
espaces fibrés vectoriels,
Ann. Inst. Fourier 14 (1964), p.145.
- (e) Surconnexions,
C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), p.6327.
- (f) Sous-variétés géodésiques et asymptotiques
relativement à une surconnexion,
C. R. Acad. Sci. Paris 259 (1964), p.2948.
- (g) Surconnexions et singularités des
applications,
C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965), p.776.
- (h) Surconnexions et connexions affines
spéciales,
C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), p.2801.

(i) Connexions d'ordre supérieur et tenseurs de structure,
Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Bologna (1967).

[17] LICHNEROWICZ, A. (a) Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,
Ed. Cremonese, Rome (1955).

(b) Géométrie des groupes de transformations,
Dunod, Paris (1958).

[18] LEHMANN, D. Quelques propriétés des connexions induites, et fibrés à groupe structural variable en géométrie d'ordre supérieur,
Mémoires Soc. Math. France
* 16 (1968).

[19] MOLINO, P. Champs d'éléments sur un espace fibré principal différentiable,
Ann. Inst. Fourier 14 (1964), p.163.

[20] MORIMOTO, A. Prolongations of G-structures to tangent bundles,
Nagoya Math. J. 32 (1968), p.67.

[21] NANU, O. Sur les prolongements d'une variété différentiable,
C. R. Acad. Sci. Paris 265 (1967), p.852.

- [22] NGO VAN QUE Du prolongement des espaces fibrés
et des structures infinitésimales,
Ann. Inst. Fourier 18 (1968).
- [23] NGUYENDINHNGOC Sur les espaces fibrés et les
prolongements,
Topologie et Géométrie Différentielle,
Seminaire Ehresmann (1963).
- [24] NICKERSON, H.K. On differential operators and
connections,
Trans. A.M.S. 99 (1961), p.509.
- [25] NOMIZU, K. Lie groups and differential geometry,
Publ. Math. Soc. Japan (1956).
- [26] OGIUE, K. (a) Theory of conformal connections,
Kōdai Math. Sem. Rep. 19 (1967), p.193.
(b) G-structures of higher order,
Kōdai Math. Sem. Rep. 19 (1967), p.488.
- [27] OTSUKI, T. (a) On tangent bundles of order 2 and
affine connections,
Proc. Japan Acad. 34 (1958), p.325.
(b) Tangent bundles of order 2 and
general connections,
Math. J. Okayama Univ. 8 (1958), p.143.
- [28] PALAIS, R.S. A global formulation of the Lie theory
of transformation groups,
Memoirs A.M.S. *22 (1957).

- [29] POHL, W.F. (a) Differential geometry of higher order,
Topology 1 (1962), p.169 .
 (b) Connections in differential geometry
of higher order,
Trans. A.M.S. 125 (1966), p.310 .
- [30] RUH, E.A. On the automorphism group of a
G-structure,
Comm. Math. Helv. 39 (1964), p.189 .
- [31] SINGER, I.M. & STERNBERG, S.
The infinite groups of Lie and Cartan I,
J. Analyse Math. 15 (1965), p.1 .
- [32] STEENROD, N. Topology of fibre bundles ,
Princeton University Press (1951) .
- [33] STERNBERG, S. Lectures on differential geometry,
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs,
New York (1964) .
- [34] SZYMAK, A. On prolongation of fibre structures
and connections of higher orders,
Bull. Acad. Polon. Sci. 13 (1965), p.661 .
- [35] TANAKA, N. (a) Projective connections and projective
transformations ,
Nagoya Math. J. 12 (1957), p.1 .
 (b) Conformal connections and conformal
transformations,
Trans. A.M.S. 92 (1959), p.168 .

- (c) On the equivalence problem associated with a certain class of homogeneous space,
J. Math. Soc. Japan 17 (1965), p.103.
- [36] TASHIRO, Y. On extension of Lie groups, transformation groups and fibre bundles,
J. Okayama Univ. 6 (1957), p.99.
- [37] VER ECKE, P. (a) Sur les connexions d'éléments de contact,
Topologie et Géométrie Différentielle, Seminaire Ehresmann 5 (1962).
(b) Géométrie Différentielle, Fascicule 1: Calcul des jets,
São Paulo, Sociedade de Matematica (1967).
(c) Sur les tenseurs de structure d'ordre supérieur d'une G-structure,
C. R. Acad. Sci. Paris 266 (1968), p.874.
- [38] WEIL, A. Théorie des points proches sur les variétés différentiables,
Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg (1953), p.111.
- [39] YANO, K. & ISHIHARA Differential geometry of tangent bundles of order 2,
Kōdai Math. Sem. Rep. 20 (1968), p.318.

[40] YANO, K. & KOBAYASHI, S.

Prolongations of tensor fields and
connections to tangent bundles,
J. Math. Soc. Japan 18 (1966), p.194 .

- [41] YUEN, P. C. (a) Prolongements de G-structures aux
espaces de prolongements,
C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), p.538.
(b) Sur les repères d'ordre supérieur et
les connexions linéaires d'ordre
supérieur,
C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), p.957.
(c) Sur les tenseurs de structure d'une
G-structure régulière d'ordre supérieur,
C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), p.1238 .
(d) Sur la notion d'une G-structure géométrique
et les A-prolongements de G-structures,
C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), p.1589 .

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le 17 Décembre . . . 19 70

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

L. GAUTHIER

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET

